LES BASES NOUS RENDENT DES COMPTES

Comment Les Simpson bouleversent notre arithmétique.

Marie ROBERT, Louis PEETERS, Joséphine ANGE, Alexia LAMBREMONT, Laura WATY, Jacques CARTUYVELS, David MOUREAUX, Marie CLARINVAL, Justine VAN DE VELDE, Sandrine BRASSEUR, Gilles HASTIR, François GEORIS, Marvyn THIRY, Samuel CHENIAUX, Valère PIERARD

Sous la supervision de Mme DE BLIECK

Nous tenons à remercier Monsieur Michel RIGO, chercheur et professeur de mathématiques à l'Université de Liège, qui nous a consacré un peu de son temps pour répondre à nos questions et nous offrir de nouvelles pistes de recherche. Cette rencontre fut très enrichissante et, grâce à lui, nous avons pu acquérir une meilleure vision des systèmes de numération positionnels et apprécier leur utilité dans la vie courante.

Un tout grand merci également à Madame Maja VOLKOV, chercheur et professeur de mathématiques à l'Université de Mons, qui a également apporté son soutien à notre projet par voie épistolaire.

TABLES DES MATIERES

ANNEXES

COMMENÇONS SUR DE BONNES BASES…

INTRODUCTION

Compter… l'homme compte et manipule les nombres de façon quotidienne. Allant du comptage de bétail jusqu'à la création de programmes informatiques extrêmement complexes, la numération se décline en des dizaines de milliers d'utilités souvent méconnues du grand public. C'est pourquoi nous avons voulu découvrir et creuser cet aspect fondamental des mathématiques, qu'est la numération.

Dans un épisode[1] de la célèbre série créée par Matt Groening *Les Simpson*, le nouveau professeur de Bart emploie une façon bien originale pour enseigner la table de multiplication par 7. Jugez plutôt :

Figure 1 :

Une table de multiplication dans la série Les Simpson.

[1] Bart Gets A 'Z' (LABF15, 10/4/09), © Twentieth Century Fox

Rien d'anormal apparemment, sauf si on pense à la particularité physique des personnages de cette série : ils ne possèdent que quatre doigts sur chaque main, ce qui fait un total de huit doigts et non dix comme nous! Dès lors, compter jusqu'à dix n'a que peu de sens puisque leur système de comptage naturel devrait être octal et non décimal, de sorte qu'à Springfield, les tables d'addition et de multiplication, différeraient fortement des nôtres. C'est ce que nous avons voulu apprendre avec ce travail : comment les Simpson et leur comptabilité sur huit doigts bouleversent notre arithmétique.

Nous avons ainsi pu découvrir que, même si notre système de base décimale nous paraît si logique et universel, de nombreux peuples ont effectué les opérations mathématiques dans différents systèmes, tous aussi spécifiques les uns que les autres. Notre recherche nous a donc permis d'étudier d'anciennes civilisations, parfois méconnues, telles que les Babyloniens, les Mayas, les Grecs ou encore les Egyptiens et de nous intéresser à leur propre système de numération.

La première partie de ce travail développe donc ces anciens systèmes que nous pouvons classer en trois catégories distinctes : les systèmes additifs où les symboles s'additionnent pour reconstituer le nombre, les systèmes hybrides qui utilisent des symboles pour désigner les rangs et d'autres pour désigner les coefficients et enfin, les systèmes positionnels dont fait partie notre propre système de numération.

Nous nous sommes ensuite plus fortement intéressés au système positionnel de base dix, que nous utilisons couramment, et surtout aux bases qu'il convenait d'employer : comment convertir l'écriture d'un nombre dans un système positionnel de base différente de la base dix ? La deuxième partie de ce document décrit ces méthodes de changements de base. Cette étude aboutit à la confection d'un programme informatique permettant de réaliser cette conversion d'une base à l'autre.

Dans cette partie, nous avons également eu l'occasion de développer certains systèmes « exotiques » que sont la numération de Zeckendorf, fondée sur la suite de Fibonacci, les systèmes d'Avizienis qui autorisent les chiffres négatifs ou encore le *Tau-system* qui, de façon surprenante, repose sur l'utilisation d'une base irrationnelle. Nous avons ainsi pu dégager les propriétés et les utilités possibles de ces systèmes.

Nous ne pouvions dès lors pas négliger les systèmes binaire, octal et hexadécimal, utilisés dans tout domaine touchant à l'informatique. Ainsi, nous avons exploré comment un ordinateur code un nombre en employant par exemple le codage BCD ou encore, comment il les manipule au dans la soustraction.

Après cela, nous avons pu revenir sur notre question initiale : à quoi ressemblent les opérations usuelles dans une autre base que la base décimale ? Et finalement, comment est-on censé calculer à l'école de Springfield en utilisant le système octal ?

C'est pour répondre à cette interrogation que dans cette troisième et dernière partie, nous explorons les opérations basiques enseignées dans les écoles primaires tout en cherchant à comprendre quels effets auraient leur manipulation dans des bases différentes de notre base décimale. Nous constatons ainsi que les mathématiques à l'école de Springfield se retrouvent affectées, différentes des nôtres ; en cause : la base octale chamboulant les règles des opérations. Nous nous sommes ensuite attardés sur les opérateurs du calcul mental et sur la preuve par neuf, qui en base huit devient une preuve par sept.

Enfin, nous nous sommes amusés à réinterpréter les critères de divisibilité en base b. Vous vous souvenez certainement de la façon de reconnaître à sa représentation un nombre divisible par 2, par 3, par 5 ou par 11 ? Le changement de base modifiant la syntaxe des nombres, ces recettes apprises à l'école en sont également métamorphosées. Pour réinventer et généraliser ces critères de divisibilité en base b, nous avons employé les congruences et l'arithmétique modulaire basées sur la division euclidienne. L'étude des critères de divisibilité nous a permis de découvrir l'existence d'outils pratiques comme le ruban de Pascal ou les automates.

Après tout cela, ce sera à vous de compter en Simpson !

COURS DE PESU EN 6 GT –ISL MARCHE-EN-FAMENNE

Institut Saint-Laurent

Math is $f(u)^n$

Travail réalisé dans le cadre des événements

DédraVMATHisons

WETENSCHAPS EXPO SCIENCES BRUXELLES

ANNÉE SCOLAIRE 2013-2014

L'HISTOIRE DES NOMBRES

DE LA PREHISTOIRE A AUJOURD'HUI

La naissance de la numération est un événement lointain, très lointain, tant au niveau temporel que spatial. Nous devrions donc remonter le temps de quelques milliers d'années pour pouvoir l'observer mais également acquérir la capacité de nous dédoubler car oui, la numération est née à plusieurs endroits différents.

Tout commença avec un os...

La première preuve de l'existence d'un système de numération nous ramène en 35000 av. J.-C. A cette époque, la numération telle que nous la connaissons n'existait pas encore, celle-ci n'apparaitra en Europe qu'au Xe siècle. Néanmoins, un os découvert en Afrique sur lequel 29 encoches sont taillées nous prouve bien que les hommes possédaient déjà un système pour compter. Celui-ci va alors évoluer, comme le montre un autre os retrouvé en Moravie (République Tchèque) succédant le premier de 5000 ans où les 55 encoches ont été regroupées par 5.

Deux théories se disputent l'apparition de la numération.

La première, et celle qui compte le plus d'adeptes, est qu'il était devenu indispensable de pouvoir compter les objets qui nous entouraient. Par exemple, il était nécessaire pour un berger de chiffrer ses moutons. La deuxième concerne les cérémonies religieuses. L'ordre des participants était très important, et donc l'utilisation des nombres ordinaux était nécessaire pour le bon déroulement de ces cérémonies.

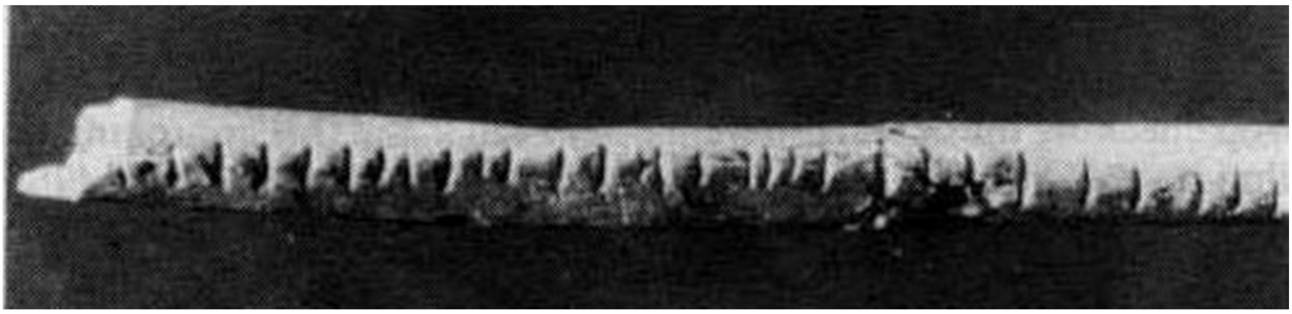


Figure I.1 : ***L'os de Lebombo****, daté d'environ 35000 ans et marqué de 29 entailles : la plus ancienne trace "numérique" trouvée dans une grotte en Afrique du sud.*

Le berger, pour compter les têtes de son troupeau n'avait pas besoin de connaître les nombres : il se contentait de mettre un caillou dans un sac au passage de chaque bête. Cette méthode rudimentaire, dite à juste titre « du berger », fut utilisée par des paysans illettrés jusqu'à la fin du XIX[e]. Le caillou serait donc à l'origine du calcul … Ce n'est pas surprenant quand on connaît l'étymologie du mot calcul (cailloux se disant *calculus* en latin).

L'utilisation d'entailles dans un os présentait néanmoins un avantage par rapport à la méthode du berger : nul besoin de transporter quantité de cailloux.

Cette numération figurée basée sur la correspondance un à un – une entaille ou un caillou = 1 bête - porte le nom de numération unaire.

L'homme, avec tous ses outils (cailloux, bâtonnets, doigts, etc.) se mit alors à compter et à concevoir des ensembles de plus en plus grands. Mais il rencontra vite un problème : comment représenter des nombres élevés de manière efficace ?

Il parait évident qu'on ne peut pas additionner ou multiplier indéfiniment des pierres et que, s'il fallait inventer un nom pour chaque nombre, notre mémoire serait mise à rude épreuve. C'est là que l'esprit pragmatique de l'homme intervient : il eut l'idée de regrouper les cailloux et les encoches par paquets. La notion de base fit graduellement son apparition. Et bien que la base 10, que nous employons aujourd'hui fut depuis l'aube de la numération la plus répandue, certains peuples utilisèrent d'autres bases pour compter.

Figure I.2 : *Bois de renne entaillé datant du Paléolithique (15 000 ans av. J.-C.)*

Avec le développement des sociétés, de la communication, de l'artisanat et du commerce, l'homme fut confronté à de nouveaux besoins. Il ne s'agissait plus seulement de représenter visuellement les quantités, il fallait également garder durablement le souvenir des dénombrements : l'apparition de l'économie obligea à la mémorisation des comptes.

C'est en Mésopotamie, une région du Croissant fertile (l'Irak actuel et une partie de la Turquie, de la Syrie, du Soudan …) qu'apparaît une forme plus évoluée de numération.

Et qu'en est-il de l'origine des mathématiques ?

Certains pensent que les débuts des mathématiques sont apparus en Egypte. En effet, les Égyptiens auraient inventé la géométrie pour faciliter la redistribution des parcelles après la crue annuelle du Nil. Une autre théorie dit qu'elles nous viennent des prêtres qui les pratiquaient et les développaient de manière totalement désintéressée pour occuper leurs journées peu productives.

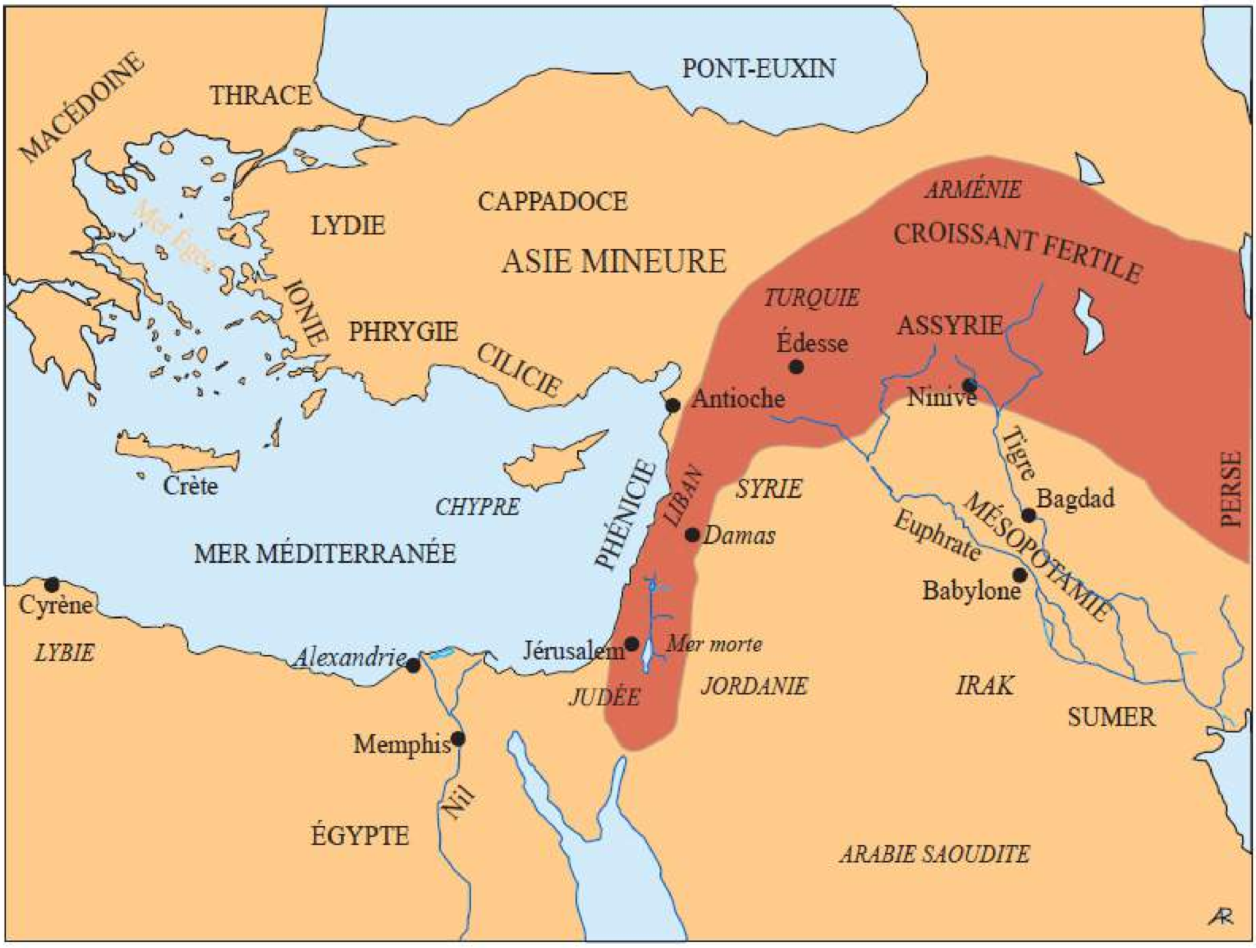


Figure I.3 : *Carte du proche Orient, le Croissant fertile (noms actuels en italique)*

En 8000 av. J.-C., pour laisser une trace de leurs différentes transactions, les Sumériens attribuèrent différentes valeurs à de petits jetons en argile, appelés calculi, dont la valeur dépendait de leur taille et de leur forme : le petit cône  pour l'unité, la bille  pour la dizaine, le grand cône  pour la soixantaine, le grand cône perforé  pour dix soixantaines …

Ces jetons d'argiles que l'on pourrait apparenter à nos actuelles pièces de monnaie, étaient glissés dans une sphère creuse en argile marquée par des sceaux qui en garantissaient l'origine et l'intégralité. Ainsi, par exemple, si la bulle de terre contenait le dénombrement d'un troupeau confié à un berger, lorsque celui-ci le ramenait, il leur suffisait de briser la bulle-enveloppe pour vérifier qu'aucune bête ne manquait.

Figure I.4 : *Calculi de Mésopotamie*

Le fait de briser l'enveloppe présentait néanmoins un inconvénient: ce système était incapable de garder traces d'opérations effectuées sur ces quantités.
Petit à petit, l'homme commença à noter le contenu de la bulle d'argile sur le dessus de celle-ci, afin de réaliser des contrôles intermédiaires sans avoir à la casser : les petits calculi devinrent inutiles et les bulles-enveloppes se transformèrent en tablettes.
Ainsi, c'est une invention majeure qui permit une nouvelle avancée dans l'histoire de la numération : l'apparition de l'écriture. Après tout, l'écriture ne fut-elle pas inventée pour satisfaire des besoins comptables ? Sur ces tablettes comptables, l'écriture des chiffres était encore très rudimentaire : à l'aide d'un calame, tige de roseau biseautée, on marquait une empreinte dans l'argile en forme de coin (du latin *cuneus*, d'où l'appellation écriture cunéiforme), dont la profondeur et l'orientation déterminaient la valeur représentée. Petit à petit, cette écriture cunéiforme évolua pour donner naissance au système de numération babylonien que nous décrivons en page 29**.**

Figure I.5 : *Tablette de comptes à écriture pictographique*

De la numération préhistorique à la numération arabe, il n'y a pas qu'un pas !

Des milliers d'années séparent les os préhistoriques de nos nombres arabes. Et durant tout ce temps, le monde a vu naitre et évoluer de nombreux systèmes de numération, visant toujours l'efficacité et donc la simplicité. Ces systèmes peuvent être classés en trois groupes : les systèmes additifs, hybrides et positionnels que nous vous présentons ci-après.

I. LE SYSTÈME DE NUMERATION ADDITIONNEL

Le système de numération additionnel est le tout premier type de système utilisé. Il fonctionnait selon une addition d'un même symbole représentant une unité, une dizaine, une centaine, etc. Pour illustrer cette façon additive de dénombrer dans ce dossier, nous allons traiter les systèmes historiques égyptien, grec, romain, tchouvache et arménien. Nous présenterons également le système navi, qui n'a jamais vu le jour sur cette terre puisqu'il est sorti de l'imagination du réalisateur James Cameron.

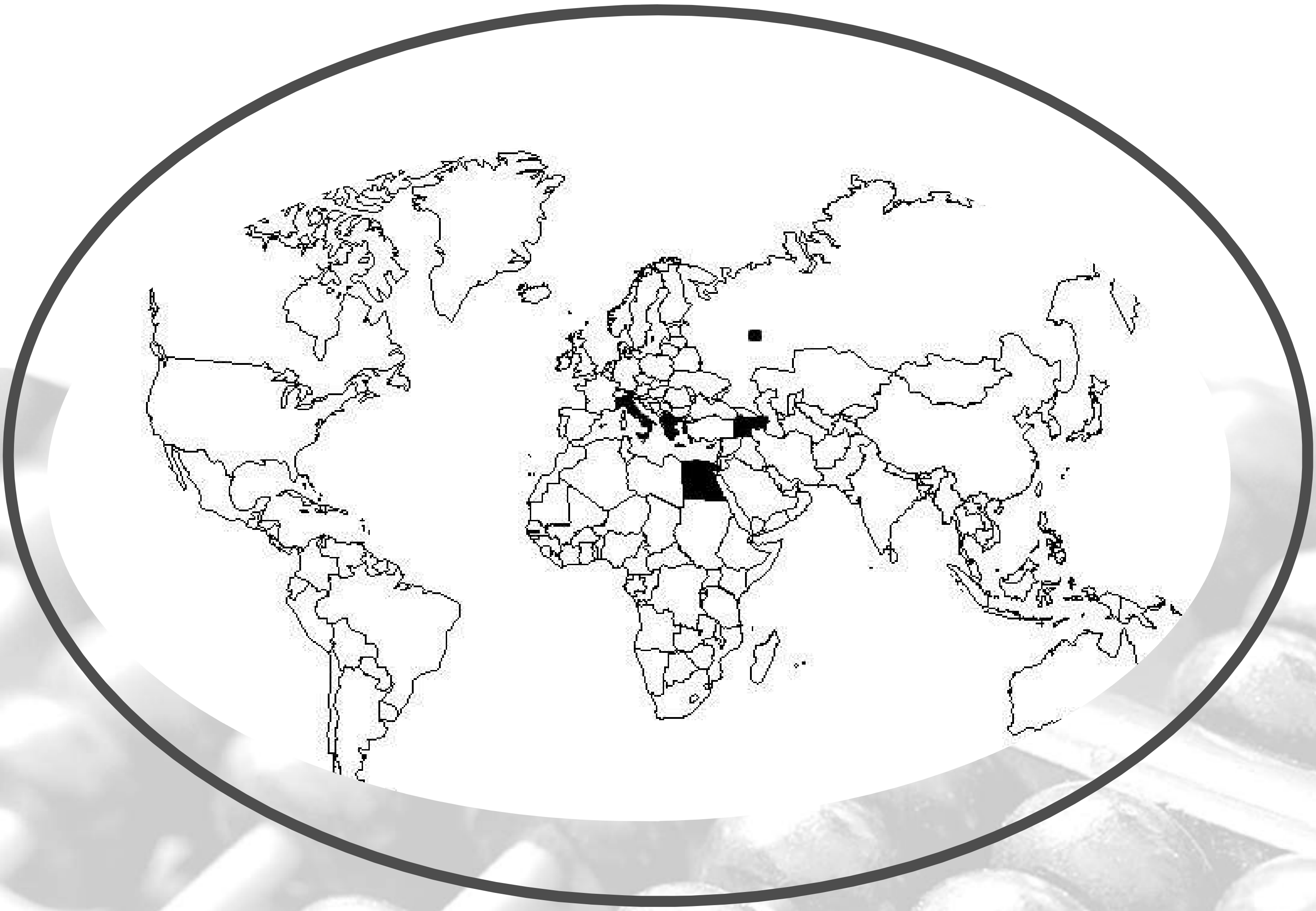


Figure I.6 : *Carte du monde*

Le système de numération égyptien

Dans l'Egypte ancienne, la notation des chiffres était basée, comme l'écriture, sur les hiéroglyphes. Les hiéroglyphes représentaient en général des objets, comme des plantes, des animaux ou des dieux. Les Egyptiens utilisaient un système de numération additif de base 10. Celui-ci est apparu en 3000 avant Jésus Christ. Chaque puissance successive de 10 était représentée par un signe particulier (cfr. tableau 1).

Figure I.7 : *Carte de l'Egypte antique, le delta du Nil, De La Porte* ***1786***

Ce système ne possédait pas de symbole pour représenter le zéro car celui-ci n'était pas utile. Les symboles pouvaient être répétés jusqu'à 9 fois, puisque les Egyptiens travaillaient en base 10, et étaient regroupés par grandeur.

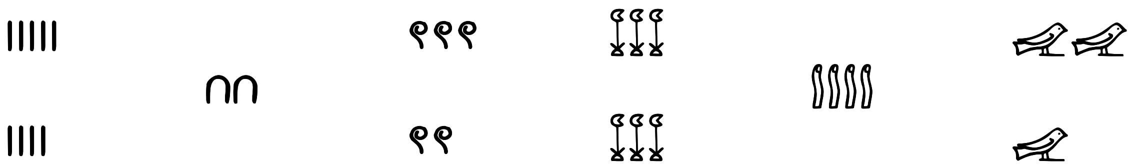
Tableau 1 : *Conversion des hiéroglyphes*

Valeur	Signe hiéroglyphique	
1	𓏺	Le bâton
10	𓎆	L'anse de panier
100	𓍢	Le rouleau de papyrus
1000	𓆼	La fleur de lotus
10 000	𓂭	Le doigt levé vers le ciel
100 000	𓆐	Le têtard, sans doute du fait du nombre élevé de ceux-ci au bord du Nil
1000 000	𓁨	Dieu agenouillé soutenant le monde entier

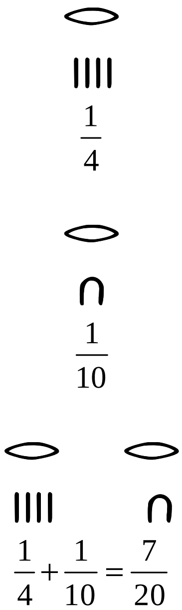
Le système était additionnel : on répétait chaque signe autant de fois que nécessaire. Pour représenter les nombres, on écrivait le symbole désignant 1 autant de fois que le nombre comportait d'unités et le symbole mis pour 10 autant de fois que le nombre comportait de dizaines, etc. Par exemple, voici la représentation du nombre *2014* :

L'avantage de cette notation est la facilité de lecture. Mais l'inconvénient majeur apparaît lorsqu'il s'agit de représenter des nombres nécessitant une répétition élevée des symboles comme 999 par exemple. Il faut 27 symboles dans le système égyptien alors qu'il n'en faut que 3 dans notre système de numération de position décimal.

On remarque que les Egyptiens écrivaient de droite à gauche. Voici un nombre beaucoup plus grand :



Les chiffres ci-dessus doivent être lus à la fois verticalement et horizontalement. Nous obtenons donc le nombre 346 529.



Les égyptiens connaissaient et utilisaient également des symboles pour représenter les fractions. Mais ils n'employaient que des fractions dont le numérateur était égal à l'unité. Ils représentaient ce numérateur *1* par le symbole représentant une bouche ouverte. Il y avait donc des signes pour désigner la demi, le tiers, le quart, ... D'autres fractions pouvaient être obtenues par addition des fractions unitaires.

La légende raconte que le dieu Seth arracha l'œil d'Horus lors du combat qui les opposait. Et le découpa en morceaux, ce fut le Dieu Thot qui le reconstitua. Donc, chacune des parties de l'œil d'Horus éclaté symbolise les fractions égyptiennes.

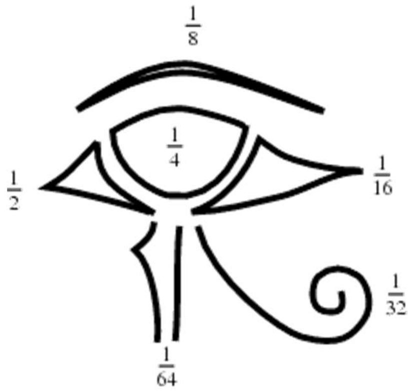


Figure I.8 :*Statue d'Horus à l'entrée du temple qui lui est dédié à Edfou (à gauche) et l'œil sacré Oudjat représentant les six fractions de l'œil d'Horus.*

Au-delà de la capacité de compter

Les Egyptiens possédaient déjà d'importantes connaissances en géométrie. Ils pouvaient mesurer le volume de leurs pyramides, de même que celui des cylindres et des parallélépipèdes rectangles. Ils étaient également capables de calculer l'aire de nombreuses formes. De plus, ils possédaient une bonne approximation du nombre pi grâce au scribe Ahmès qui l'estimait comme le carré de 16/9.

Figure I.9 : *Papyrus de Rhind découvert à Thèbes et écrit vers 1650 AV. J.-C. par le scribe Ahmès.*

Le système de numération grec

Les Grecs anciens ont connu plusieurs manières de représenter les nombres dont deux plus importantes. La première, la numération attique (celle d'Athènes) apparaît à partir du Vè siècle av. J.-C. tandis que la deuxième, la numération ionique n'a été introduite à Athènes qu'en 403 av. J.-C. mais est bien plus ancienne car on en a retrouvé des traces qui remontent à 700 av. J.-C. à Milet. Bien sûr, ces deux systèmes ne sont pas les seuls employés par les Grecs car ils variaient selon les régions mais il s'agit des plus populaires.

Figure I.10 : *Le monde grec ancien*

Le système attique ou acrophonique

Il s'agit d'un système de numération de base 10 qui contient 10 symboles. Il repose sur le principe d'addition, ce qui signifie que les chiffres placés les uns à côté des autres doivent être additionnés pour former le nombre. Ce système est très semblable au système de numération romain à une exception près : il est uniquement additif. Ainsi, le nombre quatre s'écrira IIII, et non IΠ.

On peut également qualifier ce système d'acrophonique du fait que chaque symbole (excepté la barre du 1) représente l'initiale du nom du nombre. Ce système, qu'on ne retrouve chez aucun des peuples avec lesquels les Grecs anciens étaient en contact, présente un grand avantage mnémotechnique.

Tableau 2 : *Chiffres du système attique*

Valeur	Signe	Chiffre grec	Prononciation	Dérivés étymologiques
1	I	–	–	-
5	Π	πέντε	pente	pentagramme
10	Δ	δέκα	deka	décathlon
100	H	ἑκατόν	hekaton	hécatombe
1000	X	χίλιοι	chiolioi	kilo
10000	M	μύριον	murion	myriade

Les Grecs ont ensuite assemblé ces symboles de base afin de créer plus de possibilités. C'est ainsi que les signes représentant 50, 500 et 5 000 sont des composés de la lettre pi, dans sa forme ancienne (avec une jambe droite plus courte) et d'un autre symbole qui s'apparente à une puissance de 10.

Tableau 3 : *Chiffres du système attique*

I	𐅃	Δ	𐅄	H	𐅅	X	𐅆	M	𐅇
1	5	10	50	100	500	1 000	5 000	10 000	50 000

PETIT EXEMPLE

Χ𐅅ΗΗΗΗ𐅄ΔΔΙΙΙΙ → 1X1000 + 1X500 + 4X100 + 1X50 + 2X10 + 4X1 = 1974

PETITE REMARQUE

Il n'y a pas vraiment d'ordre établi mais pour faciliter la lecture, les anciens Grecs avaient l'habitude d'écrire dans l'ordre décroissant de gauche à droite.

Figure I.11 : *Mosaïque représentant Archimède effectuant des opérations arithmétiques sur un abaque, au moment où un soldat romain s'apprête à l'assassiner. IIIe s. av. J.-C.*

Le système ionique ou alphabétique

Le système ionique fut le deuxième plus utilisé par les Grecs anciens. Comme son nom l'indique, il fait correspondre les lettres de l'alphabet grec aux chiffres en gardant leur ordre logique. Il attribue donc aux neufs premières lettres les unités (1-9), aux neufs suivantes les dizaines (10-90) et aux neufs dernières les centaines (100-900).

Tableau 4 : *Chiffres du système ionique*

Unités		Dizaines		Centaines	
1	**Α** *alpha*	10	**Ι** *iota*	100	**Ρ** *rhô*
2	**Β** *bêta*	20	**Κ** *kappa*	200	**Σ** *sigma*
3	**Γ** *gamma*	30	**Λ** *lambda*	300	**Τ** *tau*
4	**Δ** *delta*	40	**Μ** *mu*	400	**Υ** *upsilon*
5	**Ε** *epsilon*	50	**Ν** *nu*	500	**Φ** *phi*
6	**F** *digamma*	60	**Ξ** *xi*	600	**Χ** *chi*
7	**Ζ** *zêta*	70	**Ο** *omicron*	700	**Ψ** *psi*
8	**Η** *êta*	80	**Π** *pi*	800	**Ω** *oméga*
9	**Θ** *thêta*	90	**ϟ** *koppa*	900	**ϡ** *sampi*

Il faut remarquer que l'alphabet grec traditionnel ne contenait que 24 lettres et le système en nécessitait 27. Pour résoudre ce problème, les Grecs anciens sont allés rechercher dans des alphabets archaïques les lettres *digamma* (6) et *koppa* (90), elles sont d'ailleurs à leur place naturelle au milieu de la série. Il en va différemment pour *sampi* (900), qui a été empruntée à l'alphabet phénicien, probablement pour le seul besoin de la numération. Sa position en fin de la liste conforte cette hypothèse.

Bien sûr, le nombre maximal que l'on pouvait écrire avec cette notation était 999, autant dire pas grand-chose. Les Grecs anciens ont donc cherché une solution pour pouvoir écrire des nombres plus élevés.

Pour les milliers, nous reprenons les lettres utilisées pour les unités en leur rajoutant une sorte d'apostrophe devant le chiffre. Avec les dizaines de milliers il faut revenir au système acrophonique en reprenant la lettre M laquelle est surmontée d'une lettre miniature : le nombre de myriades.

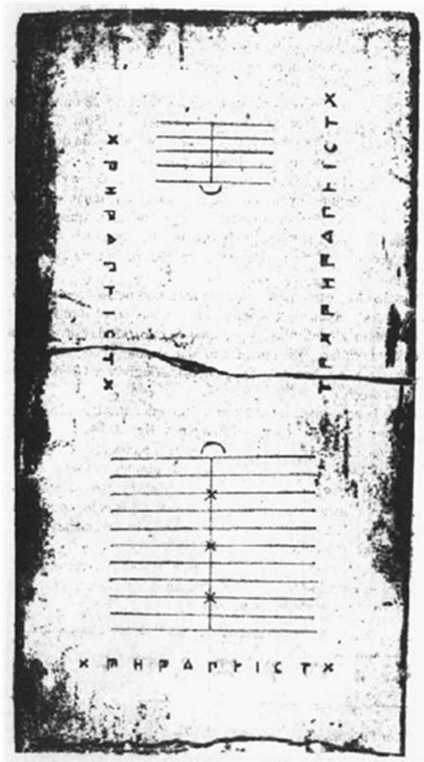


Figure I.12 : *Table de Salamine, Ve ou IVe s. av. J.-C. Ce document, d'abord interprété comme une table de jeu est en fait un instrument de calcul.*

Tableau 5 : *Chiffres du système ionique*

Milliers		**Dizaines de mille**	
1 000	À**A**	10 000	$\overset{\text{A}}{\text{M}}$ (ou **MU**)
2 000	À**B**	20 000	$\overset{\text{B}}{\text{M}}$
3 000	À**G**	30 000	$\overset{\Gamma}{\text{M}}$
4 000	À**D**	40 000	$\overset{\Delta}{\text{M}}$
5 000	À**E**	50 000	$\overset{\text{E}}{\text{M}}$
6 000	À ϛ	60 000	$\overset{\text{Ϛ}}{\text{M}}$
7 000	À**Z**	70 000	$\overset{\text{Z}}{\text{M}}$
8 000	À**H**	80 000	$\overset{\text{H}}{\text{M}}$
9 000	À**Q**	90 000	$\overset{\Theta}{\text{M}}$

PETIT EXEMPLE

ÀA ϡ O Δ → 1X1000 + 1X900 + 1X70 + 1X4 = 1974

Le système de numération romain

Durant l'Antiquité, environ 500 ans avant notre ère, les Romains utilisaient un système de numération de type additif de base 10. Cette écriture a subsisté jusqu'au Moyen-âge, avec néanmoins quelques variantes.

Avec l'extension romaine, ce système fut utilisé dans une grande partie de l'Europe. Son influence fut telle qu'aujourd'hui encore, il nous arrive de l'employer dans la pagination et dans les cadrans d'horloge.

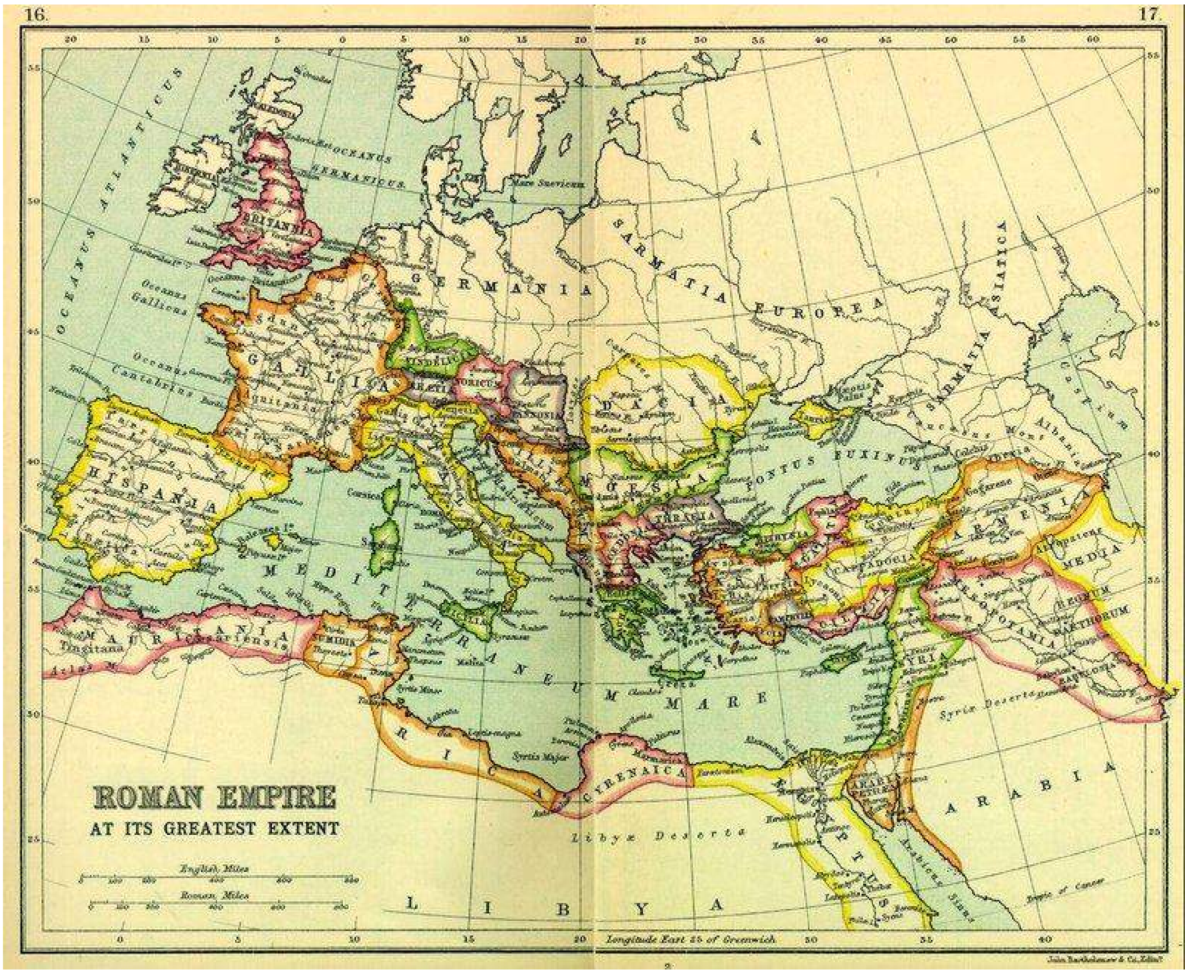


Figure I.13 : *Europe, Empire Romain*

Tableau 6 : *Chiffres du système romain*

Chiffres romains	**I**	**V**	**X**	**L**	**C**	**D**	**M**
Valeur	1	5	10	50	100	500	1000

Les Romains disposaient donc de sept symboles pour former leurs nombres. Ils ne considéraient pas le zéro comme un chiffre, c'est pourquoi ils ne le représentaient pas.

Tableau 7 :
Chiffres du système romain

Unités		Dizaines	
1	I	10	X
2	II	20	XX
3	III	30	XXX
4	IV	40	XL
5	V	50	L
6	VI	60	LX
7	VII	70	LXX
8	VIII	80	LXXX
9	IV	90	XC

Un symbole ne peut pas être répété plus de trois fois, sauf le « M » qui, pour représenter le nombre 4000, est écrit quatre fois. C'est pourquoi le chiffre 4 est symbolisé par un « I » précédant un « V » car il équivaut à « 5 moins 1 ». Ce principe est également appliqué pour le chiffre 9, les nombres 40, 90, etc. Voici le nombre 4 724 en numération romaine :

MMMMDCCXXIV

La plus grande quantité représentée par un symbole existant dans ce système étant mille, le plus grand nombre codable était 4999. Les Romains se tirèrent d'embarras en surmontant d'une barre les chiffres pour les multiplier par mille et de deux barres pour les multiplier par un million.

$\overline{XXV}$ =25 000 et $\overline{\overline{C}}$ = 100 000 000.

En pratiquant simultanément les principes additifs et soustractifs, les Romains ont considérablement compliqué la pratique de la numération.

Figure I.14 : *L'entrée LII (52) du Colisée. On peut encore apercevoir les chiffres romains gravés sur l'arche.*

Au Moyen-âge rien ne va plus !

Au Moyen-âge, l'écriture des nombres fut quelque peu simplifiée. Par exemple, quatre ne s'écrivit plus « IV », mais « IIII », qu'on appela « quatre d'horloger » car il fut utilisé dans l'horlogerie pour faciliter la lisibilité.

Figure I.16 : *Horloge d'un clocher à Bruxelles*

ↀ pour 1000.

ↁ pour 5000.

ↂ pour 10 000.

Figure I.15 : *Chiffres romains étendus.*

Une autre particularité était qu'on représentait le nombre quatre-vingt comme ceci « $\mathrm{IIII}^{\mathrm{xx}}$ », ce qui pourrait expliquer l'origine de ce mot. Le nombre trois-cents pouvait aussi être écrit de plusieurs manières : CCC ou $\mathrm{XV}^{\mathrm{XX}}$ ou $\mathrm{III}^{\mathrm{C}}$.

PETITE REMARQUE

Tout comme le système de numération grec, le système romain n'offre pas beaucoup de possibilités opératoires. Les chiffres romains et grecs sont difficilement utilisables dans une opération écrite telle que l'addition. Il était donc très compliqué de pratiquer des opérations avec un tel système. Les Romains ont imaginé un boulier sous forme d'abaque pour pratiquer leurs calculs. Cela restait néanmoins très laborieux.

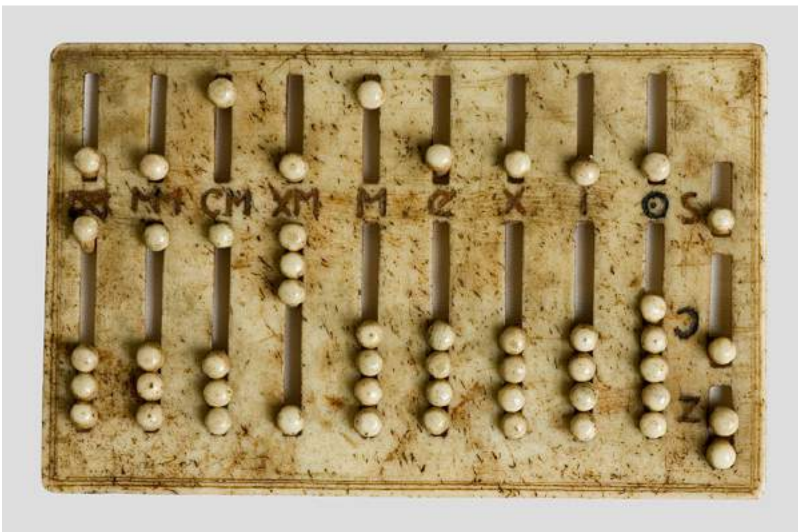


Figure I.17 : *Boulier romain*

Le système de numération tchouvache

La numération tchouvache est un ancien système de numération additif utilisé en Russie (et notamment en Tchouvachie). Ce sont les peuples turcs de Tchouvachie qui ont inventé cette numération. Les nombres tchouvaches ont été utilisés jusqu'au début du XXe siècle.

Figure I.18 : *La Tchouvachie est une république de la Fédération de Russie située sur la rive gauche de la Volga.*

Comme dans la numération romaine, un symbole ne peut pas être utilisé plus de quatre fois. Au-delà de quatre symboles à la suite, on change le trait donc on change le symbole.

La numération tchouvache ressemble beaucoup à la numération romaine mais contrairement à celle-ci, les chiffres de plus hautes valeurs sont placés à droite.

Figure I.19 : *Symboles tchouvaches.*

PETIT EXEMPLE

IIII/ ××× ✳✳ → 19 + 20 + 2000 = 2039

Le système de numération arménien

Certains systèmes de numération additifs se sont développés grâce à une invention importante : l'alphabet.

C'est le cas du système de numération arménien, né en Ancienne Arménie au début du V^{e} siècle de notre ère et qui utilisait à l'origine l'alphabet de l'époque. Cet alphabet comptait 32 consonnes et 6 voyelles.

La numération arménienne utilise les 9 premières lettres de l'alphabet pour les unités, les 9 consécutives pour les centaines et les 9 subséquentes pour les milliers.

Figure I.20 : *L'Arménie, entre la Turquie, l'ex-URSS et le plateau iranien.*

Tableau 8 : *Chiffres du système arménien*

Lettre arménienne	Valeurs Num.	Phon.	Lettre arménienne	Valeurs Num.	Phon.	Lettre arménienne	Valeurs Num.	Phon.
Ա	1	a	Խ	40	kh	Չ	700	tch
Բ	2	b	Ծ	50	ts	Պ	800	p
Գ	3	g	Կ	60	k	Ջ	900	dj
Դ	4	d	Հ	70	h	Ռ	1000	rr
Ե	5	ye/e	Ձ	80	dz	Ս	2000	s
Զ	6	z	Ղ	90	gh	Վ	3000	v
Է	7	é	Ճ	100	tch	Տ	4000	t
Ը	8	e	Մ	200	m	Ր	5000	r
Թ	9	t/th	Յ	300	y/h	Ց	6000	ts
Ժ	10	j	Ն	400	n	Ւ	7000	iu
Ի	20	i	Շ	500	ch	Փ	8000	p
Լ	30	l	Ո	600	o	Ք	9000	k

Les chiffres sont écrits de gauche à droite. L'ordre des chiffres n'a pas d'importance. Cependant la convention ordonne d'écrire les chiffres par ordre décroissant.

Comme dans le système romain, pour écrire les nombres plus grand que 9999, il faut tracer une ligne au-dessus d'un symbole, signifiant que sa valeur a été multipliée par 10 000.

PETIT EXEMPLE

$\overline{\text{Ճ Ժ Դ}}$ → $\boxed{(100+10+4) \text{ x } 10\,000 = 1\,140\,000}$

Le système de numération navi

Il existe pléthores de systèmes de numération. En voici un tout à fait fictif, inventé par le linguiste Paul Frommer pour les besoins du film « *Avatar* » de James Cameron. Les Na'vis, peuple de la planète Pandora, ne possèdent que quatre doigts et comptent selon un système additif octal, c'est-à-dire de base 8.

C'est une numération orale, il n'y a pas de retranscription écrite. Il n'existe donc pas de symboles écrits.

Figure I.21 : *Illustration du film « Avatar» de James Cameron*

Tableau 9 : *Chiffres du système Na'vi*

	0 (0+x)	1 (8+x)	2 (16+x)	3 (24+x)	4 (32+ x)	5 (40+x)	6 (48+x)	7 (56+x)
0		vol	mevol	Pxevol	tsivol	mrrvol	puvol	kivol
1	**aw**	volaw	mevolaw	pxevolaw	tsivolaw	mrrvolaw	puvolaw	kivolaw
2	**mune**	vomun	mevomun	pxevomun	tsivomun	mrrvomun	puvomun	kivomun
3	**pxey**	vopey	mevopey	pxevopey	tsivopey	mrrvopey	puvopey	kivopey
4	**tsing**	vosing	mevosing	pxevosing	tsivosing	mrrvosing	puvosing	kivosing
5	**mrr**	vomrr	mevomrr	pxevomrr	tsivomrr	mrrvomrr	puvomrr	kivomrr
6	**pukap**	vofu	mevofu	Pxevofu	tsivofu	mrrvofu	puvofu	kivofu
7	**kinä**	vohin	mevohin	pxevohin	tsivohin	mrrvohin	puvohin	kivohin

Ce tableau montre la formation des chiffres de 1 à 63. Il y a 7 chiffres de base (en gras), auxquels il faut ajouter vol ou vo (souligné), ce qui veut dire 8, pour la huitaine accomplie, ainsi qu'un des 7 chiffres des unités. Les huitaines sont formées en préfixant le chiffre huit par la racine du chiffre multiplicateur, à l'exception de huit lui-même. De 1 à 8, on prononce le chiffre symbolisant la quantité, les nombres composés sont formés en suffixant la huitaine avec la seconde racine du chiffre de l'unité (les chiffres Na'vi ont deux racines : une pour les unités composées, l'autre pour les unités multiplicatrices).

Les 8^2-aines se forment de la même façon que les huitaines, c'est-à-dire en préfixant le mot pour 64 (*zam*). Il en va de même pour les 8^3-aines (préfixe *Vozam*) et 8^4-aines (préfixe *zazam*).

Tableau 10 : Autres préfixes

zam	$64=8^2$
vozam	$512=8^3$
zazam	$4096=8^4$

On peut faire précéder les nombres de « *me* », « *pxe* », « *tsi* », « *mrr* », « *pu* », et « *ki* » pour indiquer le nombre de 64-aines, 512-aines, 4096-aines, l'absence de ces propositions signifiant qu'elles ne sont comptées qu'une fois.

II. LE SYSTÈME DE NUMERATION HYBRIDE

Le système de numération hybride est un système intermédiaire entre le système additif et le système positionnel. Ce système fonctionnait en combinant une série de multiplications et d'additions. En effet, les nombres étaient représentés comme une addition de multiples de puissances de la base. Dès lors, il existait dans ce type de système un certain nombre de symboles représentant les chiffres et d'autres symboles représentant les puissances de la base utilisée. Ce système fut surtout employé en Asie, à partir de la seconde moitié du deuxième millénaire avant Jésus-Christ.

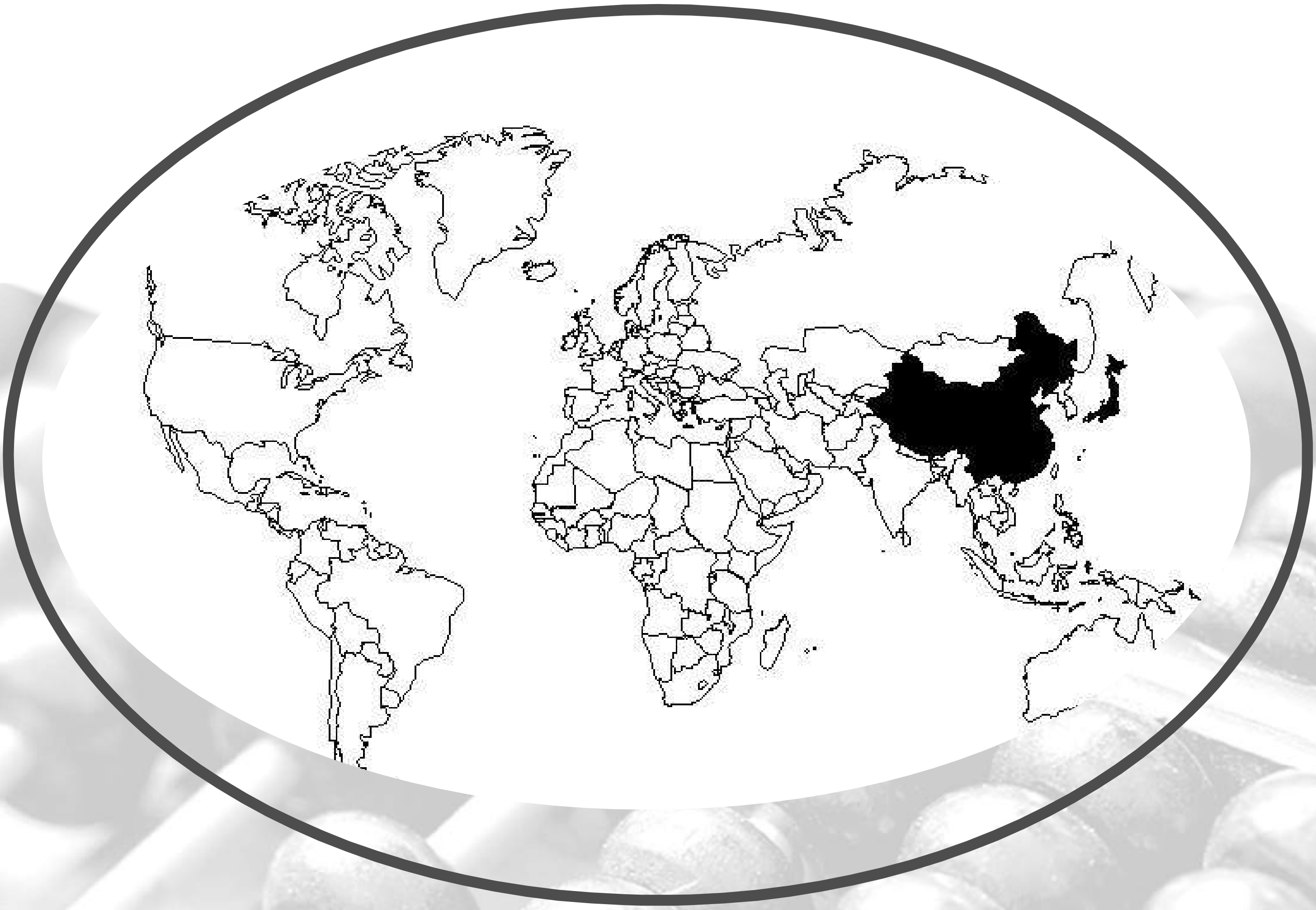


Figure I.22 : *Le monde*

Les systèmes de numération chinois et japonais

Tout d'abord, avant de commencer les points plus techniques de ces systèmes de numération, il est important de noter que ceux-ci étaient extrêmement proches d'un point de vue fonctionnel et ne différaient que dans l'utilisation des symboles représentant les chiffres. Dès lors, on peut parler de système de numération sino-japonais car « sino » réfère à la Chine et que « japonais », comme il est indiqué, réfère au Japon. Nous avons retrouvé des traces de ce système, qui date de la seconde moitié du deuxième millénaire avant l'ère chrétienne, sur des écailles de tortues et sur des os.

Ce système est composé de neuf symboles représentant les chiffres de 1 à 10 et, à l'origine, de 3 symboles représentant les puissances de la base qui est, ici, la base 10.

Tout d'abord...

0	零	*ling*
1	一	*i*
2	二	Erh
3	三	San
4	四	Ssu
5	五	Wu
6	六	Liu
7	七	Chhi
8	八	Pa
9	九	Chiu
10	十	Shih
100	百	Pai
1000	千	Chhien
10000	万	wan

Figure I.23 : *Les chiffres chinois.*

La forme des chiffres chinois ressemblait à celle utilisée aujourd'hui.

La numération sino-japonaise est hybride : les nombres sont écrits de bas en haut, en notant chaque partie du nombre comme une multiplication d'une puissance de dix, la base, par un coefficient.

Pour former le nombre en entier, il faut additionner le tout. Le zéro n'est pas nécessaire car, si un rang manque, il suffit de ne rien indiquer.

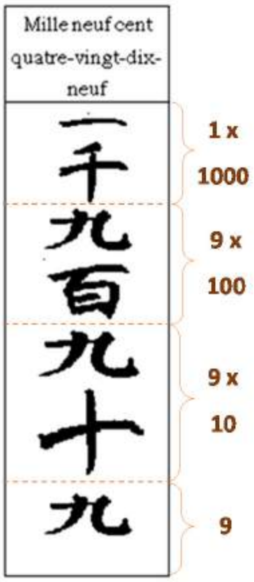


Figure I.24 :
Le nombre 1999 en chinois.

(1x1000) + (9x100) + (9x10) + (9x1) = 1999

Dès lors, nous remarquons que le nombre est représenté dans un système hybride car pour le construire, nous avons dû utiliser la multiplication et l'addition.

Ensuite...

Malgré ce système qui était en application, un autre était utilisé au même moment. Ce deuxième système était en tout point identique au niveau fonctionnel mais différait par les chiffres utilisés. En effet, les symboles employés précédemment avaient un gros avantage, c'est qu'ils étaient simples à écrire mais dès lors, ils étaient facilement modifiables en d'autres chiffres, ce qui était extrêmement dommageable pour la rédaction de documents officiels tels que les livres de comptes et les recensements. C'est pour cette raison qu'un système financier fut créé, dont les symboles sont représentés à la figure I.25.

壹	yī	un
贰	èr	deux
叁	sān	trois
肆	sì	quatre
伍	wǔ	cinq
陆	liù	six
柒	qī	sept
捌	bā	huit
玖	jiǔ	neuf
拾	shí	dix
零	líng	zéro

Figure I.25 : *Chiffres chinois dans l'économie*

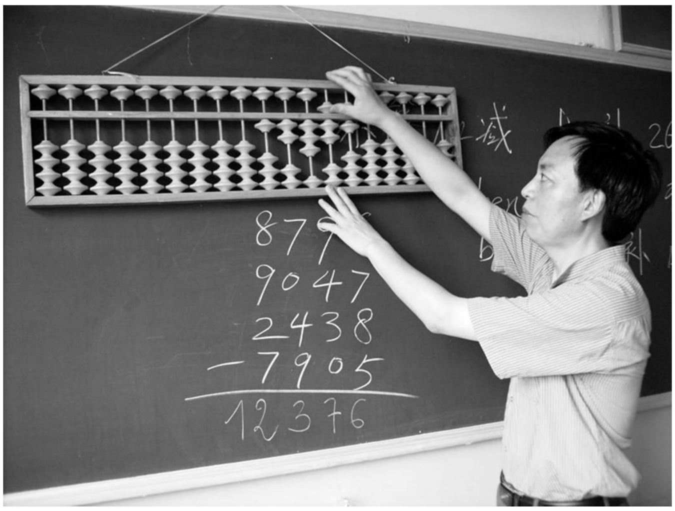
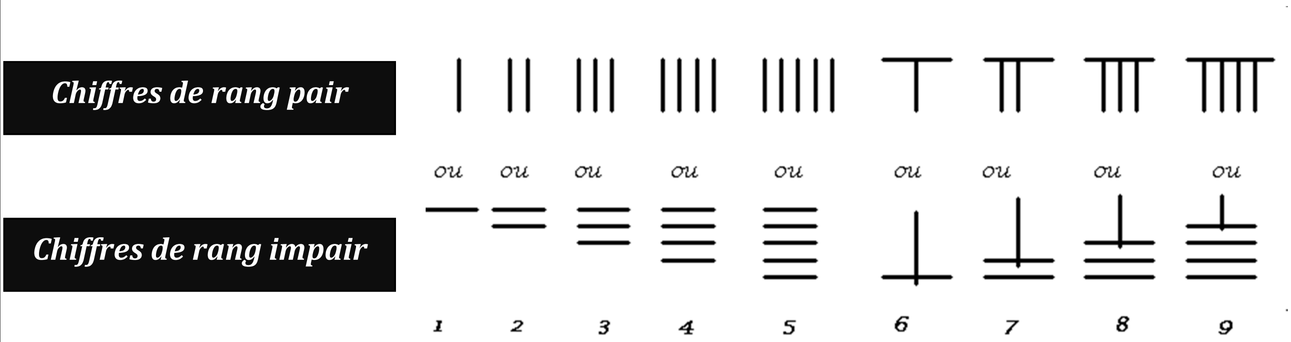


Figure I.26 : *Professeur chinois utilisant un boulier*

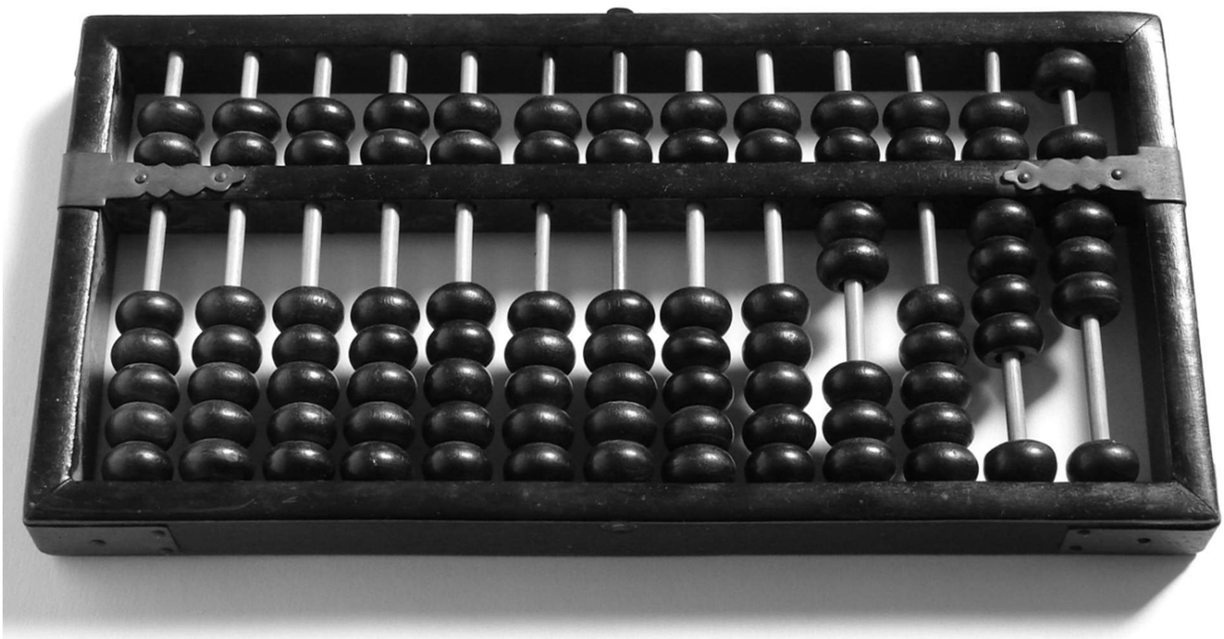
Dans leur histoire, durant plusieurs siècles, les savants chinois ont aussi employé la numération de position à base 10 : la numération à bâtons (*suànchóu*) qui remonte au Ier siècle av. J.-C. et qui est originaire de la civilisation chinoise antique. La numération à bâtons utilise deux séries de chiffres selon le rang



Le zéro est représenté par un espace vide ce qui aurait pu représenter un risque d'erreur s'il n'y avait alternance des séries.

En raison de son usage très approprié au calcul, beaucoup de mathématiciens chinois de l'époque adoptèrent cette numération pour leurs travaux. En pratique, ces "bâtons" étaient disposés sur un échiquier appelé "suanpan" (littéralement "plateau à baguettes"), qui, par la suite, a pris la forme de boulier (abaque).

Figure I.27 : *Boulier Chinois : les chinois utilisaient un boulier basé sur leur numération à bâtons. Dans la partie du haut, une boule vers le bas indique "5", tandis que dans la partie du bas, une boule vers le haut indique "1".*



III. LE SYSTÈME DE NUMERATION POSITIONNEL

Le système de numération positionnel apparait au XXVIIIè siècle av. J.-C. en Mésopotamie. Il s'est ensuite développé dans de nombreux pays jusqu'à aboutir au système arabe que nous connaissons aujourd'hui. Ce système fonctionne en attribuant certaines valeurs aux chiffres en fonction de leur position dans le nombre. Pour illustrer ce système positionnel, nous allons traiter des systèmes babylonien, maya et arabe.

Figure I.28 : *Le monde*

Le système de numération babylonien

Babylone était une cité qui fut florissante du début du IIe millénaire av. J.-C. jusqu'en 539 av. J.-C. Elle se situait en Mésopotamie, d'où le fait que la numération babylonienne soit aussi appelée la numération mésopotamienne. Cette civilisation fut précédée par les civilisations Akkadienne et Sumérienne, celles à l'origine des calculi dont nous parlons en page 5. Les Babyloniens ont vaincu les Sumériens aux alentours de 1900 av. J.-C. et ont donc établi leur capitale, en hommage à leur nom.

De nos jours, ce territoire fait partie de l'Irak.

La civilisation a donc hérité du système sexagésimal de leurs ancêtres, les Sumériens et les Akkadiens.

Les Babyloniens, contrairement à ces derniers, utilisaient le système positionnel dont ils sont les précurseurs.

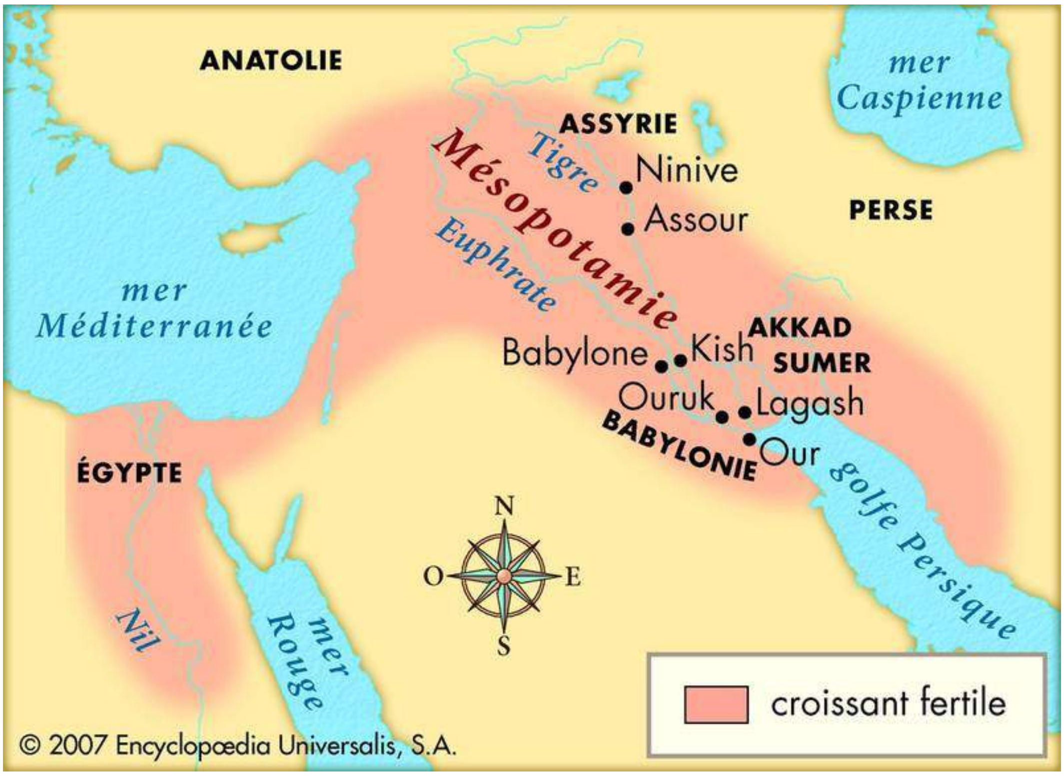


Figure I.29 : *Mésopotamie ancienne*

Symbole	Valeur
	1
	10

Les scribes de Babylone n'avaient à leur disposition que 2 chiffres. Le premier, représenté par un « clou » vertical équivaut au chiffre 1. Le second, un chevron, est associé au nombre 10.

Ils utilisaient la numération en base 60. Les chiffres jusqu'à 60 étaient écrits selon un système additif puisqu'il suffisait de juxtaposer les 2 symboles pour former les nombres.

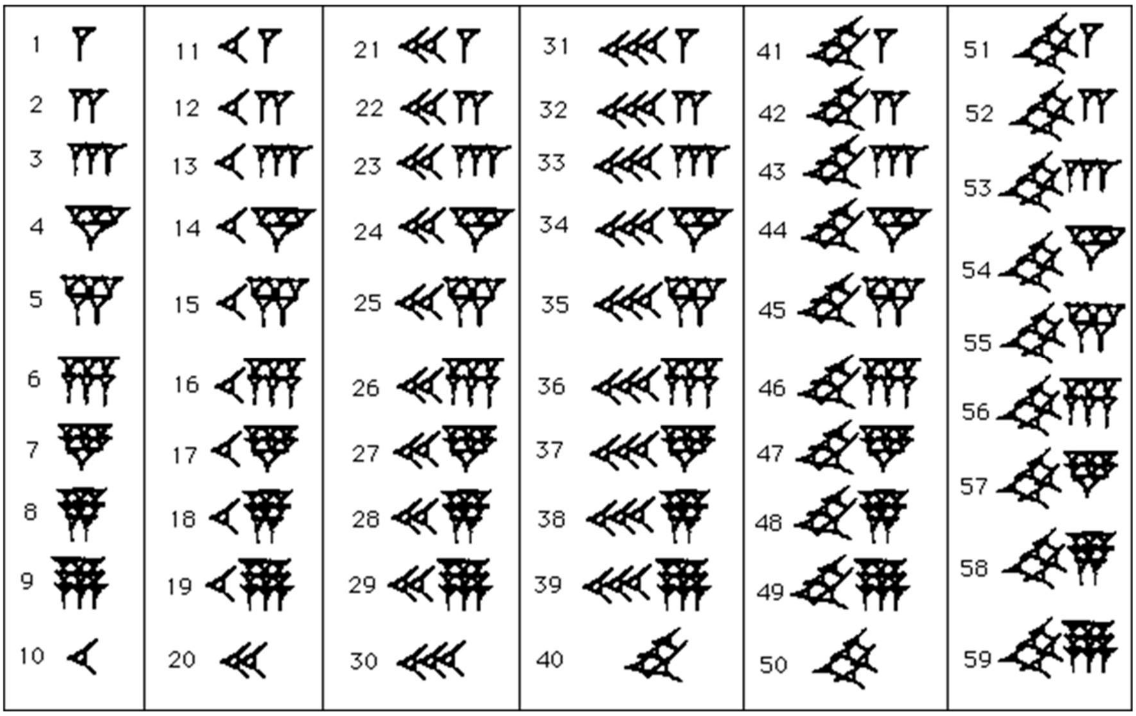


Figure I.30 : *Les chiffres babyloniens*

Et après 59 ?

A partir de 59, les nombres s'écrivaient avec les règles du système positionnel. C'est-à-dire que les chiffres étaient disposés en colonnes en fonction de leur valeur comme ci-dessous.

60^n	...	60^4	60^3	60^2	60^1	60^0

Quelques problèmes rencontrés

Un problème mineur est alors apparu. Comment différencier le chiffre 2, représenté par deux clous et le nombre 61, ayant la même représentation? Pour y remédier, ils ont différencié les rangs entre eux par un espace. Pour les chiffres inférieurs à 59, les symboles se touchaient. Le passage à une puissance supérieure, c'est-à-dire à un rang supérieur se marquait par un espace dans l'écriture du nombre.

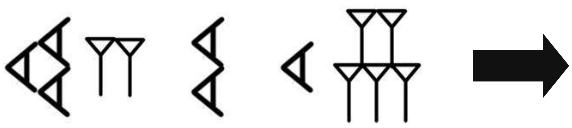
Le problème du zéro

Dans l'écriture journalière des nombres, les babyloniens oubliaient ou marquaient de moins en moins les espaces entre les symboles des nombres.

Il a donc fallu inventer un symbole pour représenter l'espace vide, ce que nous appelons aujourd'hui le zéro. Ce symbole, le plus vieux zéro de l'histoire, est représenté par un double chevron incliné. Mais ce zéro ne représentait pas une quantité. Par exemple, il n'était pas employé pour représenter la quantité équivalant à 20 moins 20.

Figure I.31 : *Le zéro babylonien*

PETIT EXEMPLE



$32X60^2 + 20X60 + 15 = 116\ 415$

Figure I.32 : *Compte de chèvres et de moutons en numération babylonienne.*

Petites remarques

Les nombres décimaux

Grâce à l'invention du système positionnel sexagésimal, les babyloniens sont aussi les précurseurs des fractions : ces derniers poursuivaient les divisions pour obtenir des parties non entières, alors qu'ils ne connaissaient pas encore de symbole de séparation. Bien sûr, comme les rangs n'étaient pas toujours bien marqués, la lecture du nombre pouvait prêter à confusion. Ainsi, pouvait aussi bien représenter le nombre 20 (20.60^0) que la fraction $\frac{1}{3}$ (20.60^{-1}).

Les traces du système babylonien dans notre numération actuelle

La base 60 a laissé ses marques dans notre système. En effet, nous la retrouvons dans les mesures du temps : une heure se découpe en 60 minutes et 1 minute en 60 secondes.

Mais elle se retrouve également dans la mesure d'un cercle : l'angle au centre d'un cercle se divise en 360 degrés, soit 60 X 6.

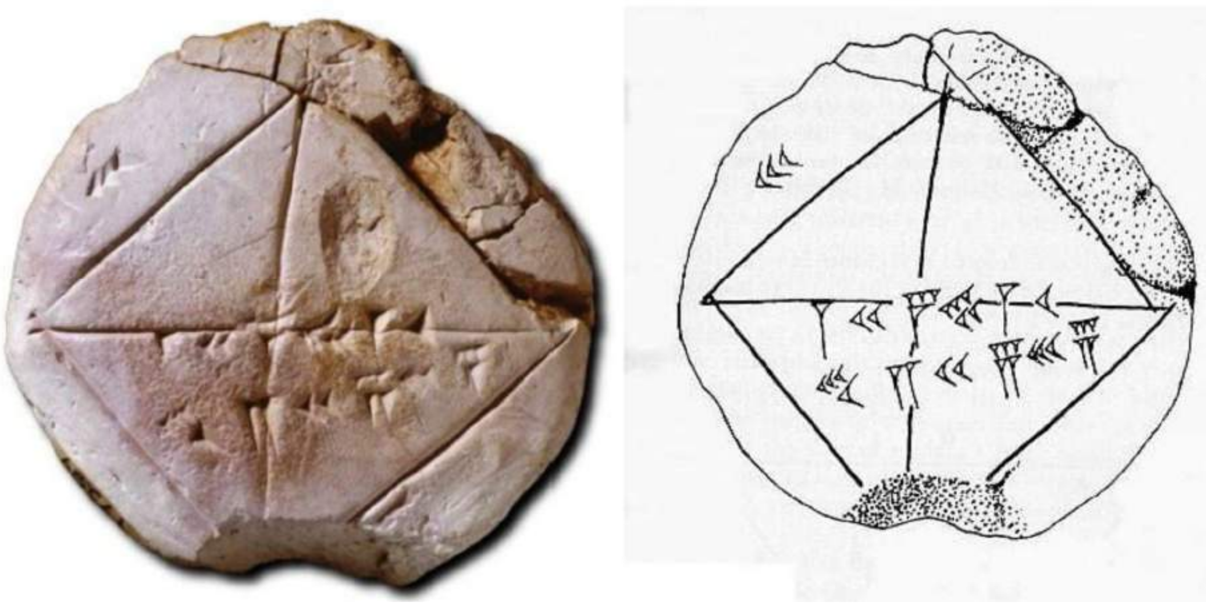


Figure I.33 : *Les babyloniens manipulaient déjà beaucoup d'opérations. Ainsi, dans la tablette YBC7289 (YBC = Yale Babylonian Catalogue), on trouve des calculs qui laissent supposer que ce peuple connaissait le théorème de Pythagore quelques 3000 avant sa découverte par Pythagore !*

Le système de numération maya

La civilisation des Mayas s'est développée entre 300 av. J.-C. et 1200 ap. J.-C. Leur territoire couvrait le sud du Mexique, le Guatemala, l'ouest du Honduras et du Salvador. Ce peuple a disparu à la suite de la conquête espagnole.

Figure I.34 : *Codex de Dresde (manuscrit maya conservé à Dresde)*

Les mayas ont laissé d'impressionnants vestiges de grandes cités dans lesquelles s'était développée une tradition savante comme en témoignent les manuscrits appelés Codex et qui ont permis de comprendre, entre autre, le fonctionnement du système de numération maya et son lien étroit avec les calendriers.

La numération des Mayas est une numération positionnelle vigésimale, c'est-à-dire de base 20. En effet, ils s'étaient rendus compte qu'en se penchant un petit peu, ils pouvaient aussi utiliser leurs orteils pour compter. C'est une numération dite additionnelle de 0 à 20 et positionnelle ensuite.

L'expression des durées occupe une place très importante dans les codex d'astronomie mayas. Elle est basée sur un système d'unités de temps de structure presque vigésimale où chaque unité vaut vingt fois la précédente : un mois (*uinal*) vaut 20 jours (*kin*). Une irrégularité dans le système est cependant présente puisqu'une année (*tun*) compte 360 jours.

Figure I.35 : *Expansion de la civilisation maya*

Figure I.36 : *Symboles de numération maya : les chiffres employés, communément appelés glyphes, étaient représentés par des têtes de divinités vues de profil.*

Les numérations écrites utilisaient deux styles de représentation des chiffres : les glyphes numériques et les signes "points/barres". Pour les calculs, les Mayas n'utilisaient pas les glyphes, qui étaient bien trop difficiles à dessiner, mais seulement 3 symboles ; à savoir, un point équivalant au chiffre un, un tiret représentant le chiffre 5, enfin une sorte d'ovale figurant la coupe d'un coquillage qui, lui, valait le chiffre 0.

Avec un tel système et de tels symboles, la capacité de représentation était infinie. En effet, ils pouvaient écrire tous les nombres car la position du chiffre lui donnait sa valeur.

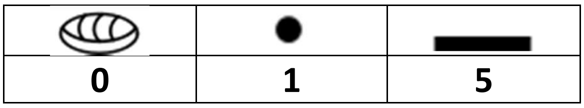


Figure I.37: *Symboles mayas pour les calculs.*

Comme pour le système babylonien, un nombre se décompose en rangs, à la différence que la base n'est plus 60 mais 20.

20^n
...
20^2
20^1
20^0

PETIT EXEMPLE

$4X20^3$

$+ 0x20^2$

$+14x20$

$+ 6 \quad = 32\ 286$

NUMERATION ORALE

Les mayas ont employé une numération orale fonctionnant sensiblement différemment de la numération écrite. Toutes les numérations mayas parlées étaient vigésimales, mais les termes utilisés pouvaient différer d'une région à l'autre.

Tableau 11

Hun	**1**
Ca	**2**
Ox	**3**
Can	**4**
Ho	**5**
Uac	**6**
Uuc	**7**
Uaxac	**8**
Bolon	**9**
Lahun	**10**
Buluc	**11**
Lahca	**12**
Hun kal	**20**

En Yucatèque, Les 12 premiers nombres et 20 possédaient chacun un nom particulier comme le montre le tableau 11.

Pour les nombres de 13 à 20, il suffisait d'ajouter le chiffre que l'on rajoute à 10 devant le suffixe « *lahun* ». Par exemple, pour 13, cela donnait *oxlahun*, pour 14, *canlahun* et ainsi de suite. Pour les nombres de 21 à 30, il fallait dès lors ajouter le mot correspondant au chiffre des unités devant le petit suffixe « *tu kal* », signifiant « après 20 ». En pratique, cela donnait pour 25, par exemple, *hotukal*.

Pour les nombres de 29 à 39, il fallait ajouter à 20 le nombre voulu. Par exemple, 39 se prononçait *bolonlahuntukal* (19 après 20).

Pour les nombres multiples de 20 jusqu'à 400, il suffisait d'intercaler le nombre de multiples de 20 entre le préfixe et le suffixe en gras dans le tableau 12. Pour la suite, l'histoire a effacé la plupart des traces, nous avons juste en notre possession les préfixes pour ces multiples de la base.Pour former les nombres, il suffisait de mettre côte à côte ces expressions.

PETIT EXEMPLE

Soit 3 200 479. Il se décompose en 3200000+400+60+19, ce qui sera prononcé en maya
hunkinchil hunbak bolonlahuntucankal.

Tableau 12

En base 10	Dénomination maya	*Traduction littérale*
40	Ca **kal**	*deux vingtaines*
60	Ox**kal**	*trois vingtaines*
80	Can **kal**	*quatre vingtaines*
400	Hun **bak**	*une quatre centaine*
8000	Hun**pic**	*un huit milliers*
160000	Hun **calab**	*un cent-soixante milliers*
3200000	Hun **kinchil**	…

Nous pouvons mettre cette numération orale usant à la fois de procédés additifs et multiplicatifs en parallèle avec notre système de numération orale. En effet, comme nous le montrons en page 39, nous utilisons des suffixes, mots pour les multiples de notre base 10, pour ensuite ajouter le chiffre des unités à ce suffixe.

Des ficelles pour compter

L'exploration de l'Amérique au XVIe siècle par les conquistadors espagnols nous permit de découvrir un peuple exceptionnellement bien organisé et florissant, le Incas. En effet, malgré l'ignorance de ceux-ci en matière d'écriture, ils mirent en place un système très simple à base de cordes et de nœuds pour compter qu'ils appelèrent *quipu*, signifiant « nœud » en français.

Un quipu est composé d'une ficelle horizontale où sont attachées des cordelettes de couleurs différentes sur lesquelles les Incas font des nœuds.

Provenant de la civilisation de Caral établie au Pérou ancien, les plus vieux quipus découverts à ce jour dateraient d'il y a 4500 ans.

Ces outils étaient utilisés pour toutes sortes de fonctions comme des représentations de faits statistiques, de calendriers ou même pour faire passer des messages.

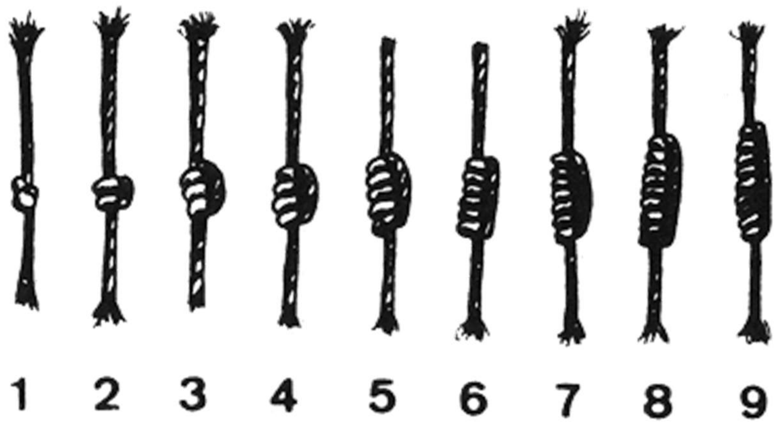
Figure I.38 : *Quipu inca.*

Effectivement, les couleurs des ficelles avaient des significations bien précises et pouvaient par conséquent illustrer des objets ou des idées conceptuelles comme le sang pour le rouge ou la pureté pour le blanc. Cependant, les quipus servaient surtout à la comptabilité qui était très développée dans l'empire Inca.

Figure I.39 : *Le Machu Picchu, ancienne cité Inca dans la cordillère des Andes, Pérou.*

COMMENT REPRESENTER UN NOMBRE ?

Les Incas travaillent avec un système positionnel, en base 10. En effet, ils partent du bas de la ficelle où ils font un certain nombre de nœuds (de 1 à 9) pour représenter les unités. Ils remontent ensuite sur la corde en laissant un espace et réalisent d'autres nœuds pour les dizaines, puis de même pour les centaines, etc.



FigureI.40 : *Les 9 chiffres du système positionnel inca.*

Des quipus en 2014 ?

Cet outil de numération a été utilisé par bien des peuples après les Incas et reste encore aujourd'hui un des nombreux moyens employés pour compter. C'est le cas en Bolivie et au Pérou où les Indiens se servent fréquemment de *chimpus*, un dérivé du quipu.

De même, on retrouve ce système de cordes chez les prêteurs sur gages sur certains archipels Japonais ou encore dans quelques peuples africains et sibériens.

PETIT EXEMPLE

Le nombre 3643 sera représenté de la manière suivante :

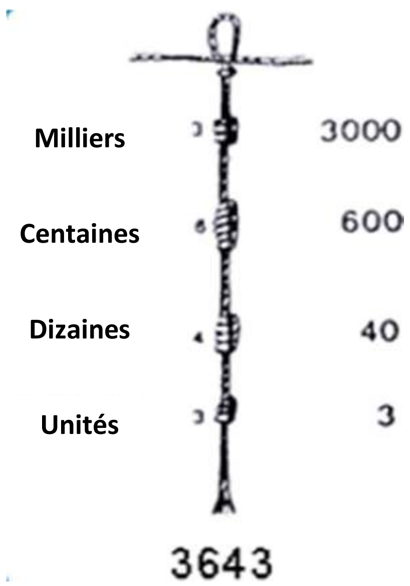


Figure I.41

Le système de numération arabe

Depuis la prime enfance, nous utilisons les chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 pour construire les nombres. Ce sont les fameux chiffres arabes. C'est grâce à l'invention de l'imprimerie, vers 1450, que les chiffres vont commencer à prendre leur forme moderne. Notre système actuel est un système décimal et positionnel, donc la capacité de représentation est infinie.

De plus, il contient dix symboles ; l'écriture d'un nombre prend moins de place que dans la numération des Mayas par exemple.

S'ils sont dits « arabes », ces chiffres ont été inventés en Inde, où, au V^e^ siècle de notre ère, naquit l'idée géniale de combiner système de position, base 10 et utilisation du zéro.

Ce système fut ensuite emprunté dès le IX^e^ siècle par le monde musulman, comme en témoigne un ouvrage d'Al-Khawarizmi (mathématicien et géographe perse, né vers 783 av. J.-C.), puis peu à peu transmis à l'Occident médiéval sous l'impulsion du pape Gerbert d'Aurillac (945-1003), qui l'introduira pour la première fois et plus tard, du mathématicien italien Léonard de Pise, dit Fibonacci qui en promouvra l'usage.

Ce système positionnel pourtant efficace et pratique mettra toutefois plusieurs siècles à supplanter le complexe système de numération romain.

Notons que le mot *chiffre* vient de l'arabe *sifr* qui signifie « vide » et le mot *zéro* vient de l'ancien italien *zefiro* qui lui-même vient de l'arabe *sifr*.

Figure I.42 : *Evolution de la numération actuelle. Il faut différencier les chiffres arabes occidentaux et orientaux. Nos chiffres actuels proviennent des chiffres arabes occidentaux, dits "gubari". Les chiffres des orientaux, dits "hindis", sont tirés directement de la notation indienne qui utilise des symboles différents pour certains chiffres.*

IV. LA NUMERATION ORALE

Nous allons clôturer cette première section en se penchant sur l'expression orale du nombre. Nous allons principalement étudier la numération orale française et belge, même si d'autres seront évoquées pour illustrer les systèmes d'énonciation.

TOUS LES CHEMINS MENENT A ROME…

Pour expliquer notre prononciation des nombres il faut remonter jusqu'à l'origine latine de celle-ci.

Nous avons vu précédemment que les Romains utilisaient un système de base décimale pour écrire les nombres, et c'est en référence à cette même base qu'ils les formulaient. Mais cette fois, plutôt que d'employer un système exclusivement additionnel, ils avaient recours à un système hybride. En effet, en latin vingt se dit *viginti* (« deux fois dix ») trente se dit *triginta* (« trois fois dix »), etc.

Cependant, les Gaulois, qui occupaient le territoire belge actuel, utilisaient un système vigésimal et progressaient donc de 20 en 20. Dès lors, on disait « vingt », « deux vingts », « trois vingts », etc. Quant aux valeurs intermédiaires, elles étaient formées en ajoutant « *et dix* ». Par exemple cinquante se prononçait *deux vingts et dix*.

Malgré notre retour au système décimal vers la fin du Moyen-âge, certaines traces du système vigésimal sont restées dans notre langage comme le « quatre-vingts » et le « soixante-dix » français (qui est un mélange du système décimal par le « *soixante* » et du vigésimal par le *« et dix »*).

UN LANGAGE IRREGULIER ET CAPRICIEUX

Nous pouvons noter de nombreuses irrégularités dans notre numération orale.

La première est la création de noms pour dire les nombres de 11 à 16 alors qu'après, nous employons une addition pour prononcer les nombres (17 se lit *dix-sept,* donc 10 + 7).

Comme deuxième bizarrerie, nous constatons que nous avons repris l'étymologie latine pour formuler les dizaines (comme expliqué ci-dessus), pourtant les centaines et milliers se forment sur un système de multiplication (200 se lit *deux cents*, donc 2x100).

Nous pouvons donc conclure qu'il y a plusieurs systèmes d'énonciation dans notre numération orale. De plus, si nous élargissons notre surface d'étude, nous découvrons encore que d'autres systèmes ont été (et sont encore) utilisés. Chaque peuple adapte son système de numération à sa propre tradition orale et aux règles de sa langue.

Nous en avons repris un certain nombre dans le tableau récapitulatif-ci-dessous.

Tableau 13 : Les opérations employées pour former oralement les nombres.

Système d'énonciation	Langues (liste non-exaustive)	Exemples
L'addition	Quasiment toutes les langues vivantes	19 = *dix-neuf* → 10 + 9 *nineteen* → 9 + 10
La multiplication	Quasiment toutes les langues vivantes	400 = *quatre cents* → 4 x 100 *cuatrocientos* → 4 x 100
La soustraction	Le latin	28 = *duodetriginta* → 30 – 2 « deux avant trente »
La division	Le breton	50 = *hanter kant* → 100 / 2 « moitié (de) cent »

Une étude linguistique permet également de voir comment a évolué l'art de compter. Ainsi, dans les langues indo-européennes, les mots désignant dix, cent peuvent être rattachés à une même origine, mais, par contre, les mots désignant mille ne le peuvent pas. Ce qui amène à penser que les peuples qui parlaient la "langue originelle", n'avaient pas atteint le millier dans le processus de comptage.

Il a fallu beaucoup de temps à l'homme pour qu'il puisse exprimer efficacement les nombres, de façon orale ou écrite. Au niveau oral, les ethnologues ont montré que certaines peuplades primitives ne disposent toujours pas de beaucoup de termes pour désigner les nombres : ils ont un mot pour « *un* », un mot pour « *deux* », … et plus, cela devient « *beaucoup* » ! "*Beaucoup*" ou "*tres*" en latin : ce mot subsiste encore aujourd'hui en français : "*très*" mais aussi "*trois*"!
Plusieurs systèmes ont coexisté dans l'histoire et l'homme a rencontré de nombreux obstacles pour parvenir au système de numération que nous connaissons aujourd'hui et que l'on peut considérer comme universel : le système de numération positionnel.

LA NUMERATION POSITIONNELLE

ET LE CHANGEMENT DE BASE

Économe en symboles et efficace dans les opérations, le système positionnel s'est finalement imposé à toutes les civilisations modernes. Mais quelle base employer ? Bien que nous utilisions la base 10, en bijection avec nos dix doigts, d'autres bases sont légitimes. Comment passe-t-on d'une base à l'autre ? Pour y répondre, comprenons le fonctionnement du système de numération positionnel et ses propriétés, partons à l'autre bout du monde pour découvrir des bases "exotiques" et examinons le rôle que jouent toutes ces bases dans l'informatique.

Toutes les bases sont dans la nature

Compter implique d'associer une séquence de noms (de symboles) ou (de cailloux, d'entailles) à une quantité. On ne peut pas retenir une infinité de symboles ni prévoir une infinité de cailloux. Il a donc fallu regrouper les quantités par paquets. La taille d'un paquet constitue la base.

L'invention du système de numération positionnel n'a rien changé à cela : la base dans un système de numération positionnel correspond au nombre de symboles ou chiffres utilisés pour coder le nombre dans ce système.

Bien que le système décimal soit le plus répandu dans l'histoire et adopté universellement de nos jours, l'homme emploie encore ou a employé d'autres systèmes de numération positionnel.

Nous avons déjà rencontré les systèmes vigésimaux en base 20 des Mayas et sexagésimaux en base 60 des Babyloniens.

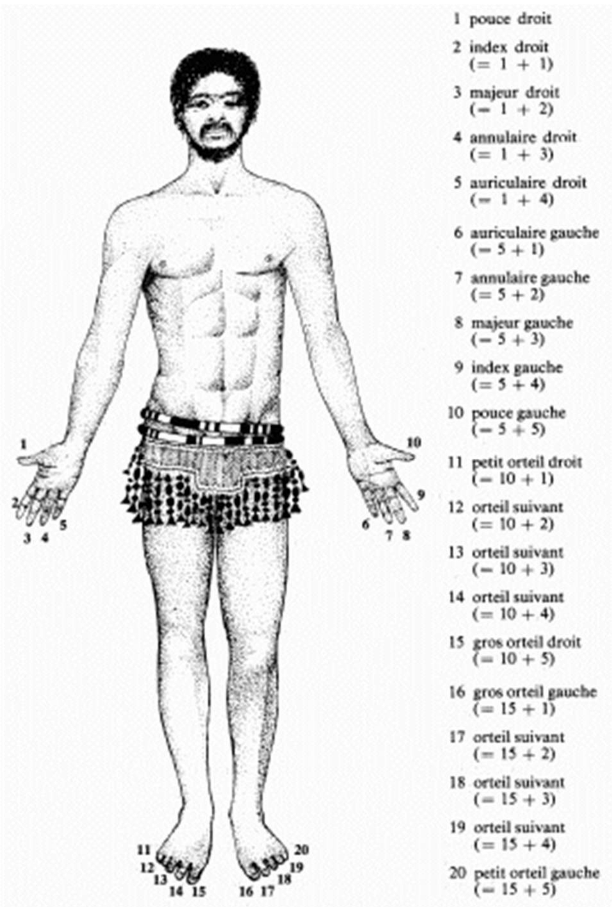
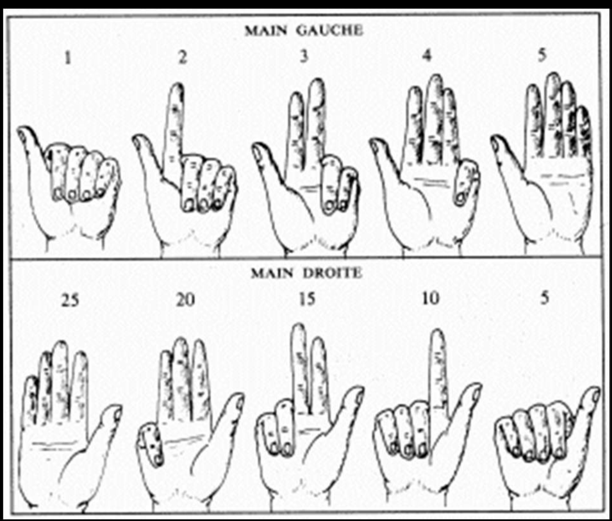


Figure II.1 : *La base vingt fut employée par certaines cultures car l'homme possède vingt doigts et orteils sur lesquels il peut compter.*

D'autres peuples ont choisi de regrouper les objets par 5, sans doute pour des raisons anthropomorphiques : une seule main pour compter.
Le système duodécimal en base 12 s'est également bien répandu et laisse des traces aujourd'hui dans notre vocabulaire (une *douzaine* d'œufs !). Les Anglais ont d'ailleurs établi leur système métrique sur cette base : un pied, valant 12 pouces !



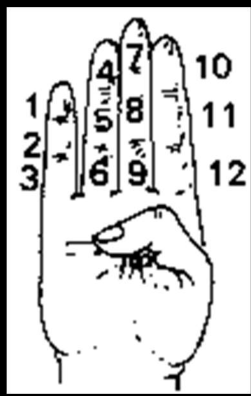


Figure II.2 et II.3 : *Voici deux techniques digitales pour compter en base 5 (à gauche) et en base 12 (à droite) où, en s'opposant aux autres doigts, le pouce permet de compter 12 phalanges.*

Aujourd'hui, l'homme utilise encore d'autres bases. Ainsi, la base 2, représentative de la logique et de l'algèbre de Boole, est utilisée par l'ordinateur. Les systèmes octal (base 8) et hexadécimal (base 16), issus du binaire, permettent de représenter des valeurs binaires de façon compacte avec une conversion facile comme nous le montrerons en page 71.

De façon générale, un nombre N exprimé dans un système positionnel de base *b* est codé à l'aide de *b* symboles différents nommés chiffres.

Le codage d'un nombre naturel en base *b* repose sur le théorème suivant.

Considérons $b \in \mathbb{N}_{0,1}$, une base de numération.

Pour tout naturel *N* non nul, **il existe une seule et unique** décomposition de *N* sous la forme

$$N = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ldots + a_1 b^1 + a_0 \quad (1)$$

Où $0 \leq a_i < b \quad \forall i \in \{0, \ldots, n\}$

Où $n \in \mathbb{N}$, est tel que $a_n \neq 0$.

On a donc effectué la décomposition de l'entier *N* en base *b* et on note $N = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}^{\,b}$.

L'expression (1) porte le nom de *représentation polynomiale.*

Si un système de numération est à base *b*, alors il y aura un nombre *b* de chiffres compris entre 0 et *b*-1.

DEMONSTRATION DE L'EXISTENCE

Cette démonstration repose sur le théorème de la division euclidienne que nous vous rappelons ici et constitue un algorithme d'obtention de l'écriture d'un nombre en base *b*.

Soit $b \in \mathbb{Z}_0$, $n \in \mathbb{Z}$; $\exists! (q, r) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $n = q.b + r$ où $0 \leq r < |b|$

Pour démontrer notre théorème, nous appliquons plusieurs fois l'algorithme de division d'Euclide.

Si $N < b$, on peut choisir directement $a_0=N$.

Si $N \geq b$, divisons N par b.

$\exists!(q_0,r_0)\in\mathbb{Z}^2$ tel que $N=q_0.b+r_0$ où $0\leq r_0<|b|$

Si $q_0<b$, alors on pose $a_1=q_0$ et $a_0=r_0$.

Nous avons dans ce cas $N=\overline{a_1a_0}^{b}$.

Si $q_0\geq b$, on effectue la division euclidienne de q_0 par b.

$\exists!(q_1,r_1)\in\mathbb{Z}^2$ tel que $q_0=q_1.b+r_1$ où $0\leq r_1<|b|$

Si $q_1<b$, alors on a $N=(q_1.b+r_1).b+r_0=q_1.b^2+r_1.b+r_0$

On pose alors $a_2=q_1$, $a_1=r_1$ et $a_0=r_0$.

Nous avons dans ce cas $N=\overline{a_2a_1a_0}^{b}$.

Si $q_1\geq b$, on recommence ...

On obtient alors une suite $(q_0,q_1,q_2,\ldots)$ décroissante et finie car b>1.

Il existe donc un entier p tel que $q_p<b$ et $q_{p-1}\geq b$.

On écrit la suite des divisions obtenues :

$$\begin{aligned}
&N=b.q_0+r_0\\
&q_0=b.q_1+r_1\\
&\ldots\\
&q_{p-1}=b\ .q_p\ +r_p
\end{aligned}$$

On multiplie alors chaque égalité par b^{i+1} $\forall i\in\{0,\ldots,p-1\}$

$$\begin{aligned}
&N=b.q_0+r_0\\
&b.q_0=b^2.q_1+b.r_1\\
&\ldots\\
&b^p\ .q_{p-1}=b^{p+1}.q_p\ +b^p\ .r_p
\end{aligned}$$

On effectue alors la somme des égalités membre à membre :

$$N + b.q_0 + ... + b^p.q_{p-1} = b.q_0 + ... + b^p.q_{p-1} + b^{p+1}.q_p + r_0 + br_1 + ... + b^p.r_p$$

Des termes se simplifient. Finalement, nous obtenons :

$$N = b^{p+1}.q_p + b^p.r_p + ... + br_1 + r_0$$

Où $0 \le r_i < |b| \ \forall i \in \{0,...,p\}$

Et $0 < q_p < |b|$.

Nous pouvons alors poser $a_n = q_p$, $a_i = r_i \ \forall i \in \{0,...,p\}$.

Nous avons dans ce cas $N = \overline{a_n...a_1a_0}^{b}$.

DEMONSTRATION DE L'UNICITE

L'unicité provient simplement de l'unicité des couples (q_i, r_i) dans la division euclidienne.

Illustrations…

En base décimale

N=$\overline{6734}^{10}$=$6.10^3 + 7.10^2 + 3.10^1 + 4.10^0$

Ce même nombre N…

En base octale

N=$\overline{15116}^{8}$=1.8^4+$5.8^3 + 1.8^2 + 1.8^1 + 6.8^0$

En base binaire

N=$\overline{1101001001110}^{2}$

$=1.2^{12} + 1.2^{11} + 0.2^{10} + 1.2^9 + 0.2^8 + 0.2^7$
$+ 1.2^6 + 0.2^5 + 0.2^4 + 1.2^3 + 1.2^2 + 1.2^1 + 0.2^0$

On voit que, plus la base est petite, plus le codage des nombres est fastidieux.

Propriétés

De la démonstration précédente, nous pouvons tirer les propriétés suivantes :

Si $b \in \mathbb{N}_{0,1}$ est une base de numération, alors

- $\overline{0}^{10} = \overline{0}^{b}$
- $\overline{1}^{10} = \overline{1}^{b}$
- $\overline{b}^{10} = \overline{10}^{b}$
- $\forall n \in \mathbb{N},\ \overline{b^n}^{10} = \overline{1\underbrace{0...0}_{n \text{ zéros}}}^{b}$

Codage d'un nombre non naturel

Il est finalement assez simple d'étendre la décomposition en base b aux entiers négatifs. Il suffit pour cela d'inventer un symbole, notre signe «-», et de construire $\mathbb{Z}^-$ en miroir au départ de $\mathbb{N}$.

La situation se corse par contre quand il s'agit de coder un nombre non entier q.

On pourrait très bien contourner le problème en ne considérant que les nombres rationnels représentés en écriture fractionnaire.

Soit $q \in \mathbb{Q}$. Alors $\exists\ \alpha, \beta \in \mathbb{Z} : q = \dfrac{\alpha}{\beta}$. On pourrait représenter q en base b, en décomposant α et β dans la base b voulue.

Donc, si $\alpha = \overline{\alpha_n ... \alpha_1 \alpha_0}^{b}$ et $\beta = \overline{\beta_n ... \beta_1 \beta_0}^{b}$, alors $q = \dfrac{\overline{\alpha_n ... \alpha_1 \alpha_0}^{b}}{\overline{\beta_n ... \beta_1 \beta_0}^{b}}$.

Cependant, si on souhaite écrire le nombre q sous forme développée en puissances de la base, ou si q est irrationnel, cela nécessite un nouvel algorithme de codage.

Si $q \notin \mathbb{Z}, \exists\, n \in \mathbb{Z}$: $n<q<n+1$ où n est la partie entière par défaut de q. On écrira $n \underset{noté}{=} [q]$.

On peut écrire : $q=[q]+\{q\}$ où $q-[q] \underset{noté}{=} \{q\}$

On peut coder un nombre en base b en traitant séparément la partie entière $[q]$ et la partie décimale $\{q\}$.

On sait déjà représenter l'entier $[q]$ en suivant la procédure de la page 44 : $[q]=\overline{a_n ... a_1 a_0}^b$.

Il reste à savoir comment représenter l'élément $\{q\} \in]0,1[$.

$\forall \{q\} \in]0,1[, \exists$ $(a_{-1}, a_{-2}, ..., a_{-n}, ...)$ une suite – éventuellement infinie – de naturels vérifiant :

1. $a_{-i} < b, \forall i \in \mathbb{N}$
2. $\{q\} = \sum_{i=1}^{+\infty} a_{-i} b^{-i}$

Théorème que nous avons admis

Nous avons alors :

(1) $$q=[q]+\{q\}=\sum_{i=0}^{n} a_i b^i + \sum_{i=1}^{+\infty} a_{-i} b^{-i} \underset{noté}{=} \overline{a_n ... a_1 a_0 , a_{-1} a_{-2} ... a_{-n} ...}^b$$

Le type de représentation dans la décomposition d'un nombre en base *b* diffère selon la nature de celui-ci. En effet, la suite de chiffres du développement (1) peut être limitée, illimitée mais présenter une périodicité ou encore être infinie.

1. $\overline{\frac{1}{8}}^{10} = \overline{0,125}^{10}$ est un rationnel présentant un développement décimal limité.
2. $\overline{\frac{1}{6}}^{10} = \overline{0,1666...6...}^{10}$ est un rationnel présentant un développement décimal illimité mais périodique.
3. $\overline{\sqrt{2}}^{10} = \overline{1,41421356...}^{10}$ est un réel qui présente un développement décimal illimité non périodique.

Quelle que soit la base $b \in \mathbb{N}_{0,1}$ choisie, un nombre rationnel q ∈ ℚ possède toujours un développement limité (sa partie décimale se termine par une suite de 0) ou illimité mais périodique à partir d'un certain rang. Un nombre irrationnel est toujours représenté par un développement illimité non périodique.

En pratique, nous ne manipulons jamais de réels lors de calculs, nous ne manipulons que des approximations rationnelles de ces réels. Une machine (ordinateur ou calculatrice) approchera toujours un réel par un rationnel. Par conséquent, nous ne devons jamais perdre de vue que les opérations arithmétiques sur les réels ne doivent pas être considérées comme exactes.

Si nous n'imposons pas de condition supplémentaire, le nouvel algorithme de codage montre que ce système de numération positionnel est redondant : certains rationnels peuvent être codés de façons différentes.

Illustrations

$\overline{1}^{10} = \overline{0,9999...}^{10}$.

En effet, $\overline{0,9999...}^{10} = \sum_{i=1}^{+\infty} 9.10^{-i}$. Il s'agit de la somme d'une série convergente dont le terme général est 9.10^{-i}. Or, nous avons $\sum_{i=1}^{+\infty} 9.10^{-i} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} 9.10^{-i} = \lim_{n\to+\infty} \frac{9}{10}.\frac{1-10^{-n}}{1-10^{-1}} = 1$.

$\overline{0,22}^{4} = \overline{0,213333...}^{4}$ pour la même raison.

Le développement en base b illimité d'un nombre réel, et à fortiori d'un nombre rationnel, est unique si on s'interdit de finir par une séquence périodique composée de 'b-1'.

Tout naturel excepté 0 et 1 peut fournir une base. De plus, l'écriture d'un nombre en base *b* s'écrit à l'aide de *b* chiffres allant de 0 à *b*-1. A partir de la base 11, nous devons utiliser des lettres afin d'éviter toute ambiguïté entre, par exemple, le nombre 13 et les chiffres 1 et 3.

Voici ce que l'on obtient :

- A = $\overline{10}^{10}$
- B = $\overline{11}^{10}$
- C = $\overline{12}^{10}$
- D = $\overline{13}^{10}$
- ...

Il existe différentes notations pour désigner la base d'un nombre.

- $\overline{1011101}^{2}$
- $(1011101)_2$

Le « 2 » noté sous forme d'indice ou d'exposant indique ici qu'on compte dans la base 2.

Il n'y a que dans le système en base 10 que l'on peut utiliser les termes centaines, milliers, etc. Dans les autres bases, on doit lire le nombre chiffre par chiffre. Le nombre $\overline{101101}^{2}$ se dit dès lors "un, zéro, un, un, zéro, un".

Les bases les plus couramment utilisées sont:

- la base 2 (système binaire): en électronique numérique et informatique,
- la base 3 (système ternaire) : en électronique et dans le développement des logiciels.
- la base 8 (système octal): en informatique
- la base 9 (système nonaire) : est au système ternaire ce qu'est le système octal au binaire, une version compacte.
- la base 10 (système décimal): notre base actuelle
- la base 12 (système duodécimal)
- la base 16 (système hexadécimal): en informatique
- la base 20 (système vigésimal)

Figure II. 4 : *Al-Khawarizmi (783-850), mathématicien perse, dont le nom est à l'origine des mots « algorithme » et « algèbre ».*

Conversion d'un nombre de la base *b* vers la base 10

En ce qui concerne la conversion de la base *b* à la base 10 des nombres entiers positifs, il faut écrire le nombre dans sa représentation polynomiale. En d'autres termes, il faut représenter le nombre comme la somme de puissances successives de la base. On obtient donc:

$$\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0}^{\,b} = \overline{a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ldots + a_2 b^2 + a_1 b^1 + a_0 b^0}^{\,10} = \overline{\sum_{i=0}^{n} a_i b^i}^{\,10}$$

Illustrations...

$$\overline{101101}^{\,2} = 1.2^5 + 0.2^4 + 1.2^3 + 1.2^2 + 0.2^1 + 1.2^0 = \overline{45}^{\,10}$$

$$\overline{743}^{\,8} = 7.8^2 + 4.8^1 + 3.8^0 = \overline{483}^{\,10}$$

$\overline{3980}^{\,8}$ est une représentation impossible car 9 et 8 ne sont pas des chiffres de la base 8 (8>7 et 9>7).

La conversion des nombres entiers négatifs fonctionne comme la conversion des nombres entiers positifs, il nous faut juste rajouter un signe devant pour montrer que l'on travaille avec des nombres négatifs. On obtient donc:

$$\overline{-a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0}^{\,b} = \overline{-\left(a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ldots + a_2 b^2 + a_1 b^1 + a_0 b^0\right)}^{\,10} = \overline{-\sum_{i=0}^{n} a_i b^i}^{\,10}$$

Illustration...

$$\overline{-101101}^{\,2} = -(1.2^5 + 0.2^4 + 1.2^3 + 1.2^2 + 0.2^1 + 1.2^0) = \overline{-45}^{\,10}$$

Pour convertir des nombres non entiers q $\notin \mathbb{Z}$, il faut aussi représenter le nombre sous sa forme polynomiale, en séparant le codage de la partie entière $[q]$ et de la partie restante $\{q\}$ (cfr. page 47).

Cette représentation deviendra donc :

$$N = \overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0 , a_{-1} a_{-2} \ldots a_{-m+1} a_{-m}}^{b}$$

$$N = \overline{a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ldots + a_2 b^2 + a_1 b^1 + a_0 b^0 + a_{-1} b^{-1} + \ldots + a_{-m} b^{-m}}^{10}$$

$$N = \sum_{i=-m}^{n} a_i b^i$$

Illustration…

$$\overline{26{,}54}^{8} = 2.8^1 + 6.8^0 + 5.8^{-1} + 4.8^{-2} = \overline{\frac{363}{16}}^{10} = \overline{22{,}6875}^{10}$$

Les **nombres non entiers négatifs** ont le même système de conversion que les nombres décimaux positifs. En effet, comme pour les nombres entiers, il faut ajouter un signe afin de savoir que l'on travaille avec des nombres négatifs. La conversion ressemblera donc à :

$$N = -\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0 , a_{-1} a_{-2} \ldots a_{-n+1} a_{-n}}^{b}$$

$$N = -\overline{a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ldots + a_2 b^2 + a_1 b^1 + a_0 b^0 + a_{-1} b^{-1} + \ldots + a_{-m} b^{-m}}^{10}$$

$$N = -\sum_{i=-m}^{n} a_i b^i$$

Illustration…

$$-\overline{3{,}741}^{8} = -3.8^0 - 7.8^{-1} - 4.8^{-2} - 1.8^{-3} = -\overline{\frac{2017}{512}}^{10} = -\overline{3{,}939453125\ldots}^{10}$$

On a l'impression que ce nombre perd sa nature rationnelle selon qu'il est codé en base 8 ou en base 10. Il n'en est rien. Un nombre au développement illimité périodique le conserve, seule la période change.

Par contre, les **nombres irrationnels** sont impossibles à convertir. En effet, les nombres irrationnels sont des nombres dont la représentation est infinie et non périodique. De plus, il est impossible de les écrire sous la forme d'une fraction $\frac{a}{b}$ telle que *a* et *b* soient des nombres entiers relatifs et *b* différent de 0. Il est donc impossible de les convertir. Toutefois, on peut convertir des nombres proches de leur valeur en arrondissant les nombres irrationnels voulus. C'est ce que font les processeurs d'ordinateurs lorsqu'ils convertissent une quantité exprimée dans le système décimal en une expression binaire par exemple.

Conversion d'un nombre de la base 10 vers la base *b*

En ce qui concerne la conversion de la base 10 à la base *b* des **nombres entiers positifs**, il existe plusieurs méthodes : une méthode algébrique et une méthode utilisant des tableaux, plus ergonomique.

POUR LA METHODE ALGEBRIQUE

Convertissons le nombre N= $\overline{a_n a_{n-1} ... a_2 a_1 a_0}^{10}$.

Soit à obtenir, N sous la forme $\overline{a'_{n'} ... a_1' a'_0}^{b}$.

Pour convertir ce nombre, nous procédons à l'algorithme que décrit la démonstration en page 44.

Par une succession de divisions par *b*, nous cherchons à obtenir les suites de couples (q_i, r_i) jusqu'à l'obtention d'un q_p tel que $0 < q_p < |b|$.

$$N = b.q_0 + r_0$$
$$q_0 = b.q_1 + r_1$$
$$...$$
$$q_{p-1} = b.q_p + r_p$$

En substituant les quotients successifs par leur expression fournie par la division euclidienne, on peut obtenir la représentation polynomiale du nombre.

$$N = b^{p+1}.q_p + b^p.r_p + ... + br_1 + r_0$$

Nous avons $a'_{n'} = q_p$, $a'_i = r_i \quad \forall i \in \{0,...,p\}$.

Et nous obtenons $N = \overline{a'_{n'} ... a_1' a'_0}^{b}$

Illustration...

$$\overline{3980}^{10} = 497.8+4$$
$$=(62.8+1).8+4$$
$$=((7.8+6).8+1).8+4$$
$$=7.8^3+6.8^2+1.8^1+4.8^0$$
$$=\overline{7614}^8$$

POUR LA METHODE PAR TABLEAUX

Il existe plusieurs présentations utilisant des tableaux pour faciliter la conversion d'un nombre.

Voici deux exemples de présentation avec leur méthode :

Soit N= $\overline{a_n a_{n-1}...a_2 a_1 a_0}^{10}$.

Nombre à convertir	Base désirée (b)
Quotient de la division de N par b (q_0)	Reste de la division du nombre N par b (r_0)
Quotient de la division de q_0 par b (q_1)	Reste de la division de q_0 par b (r_1)

Pour obtenir le nombre dans la base désirée, il nous faut continuer ainsi de suite jusqu'à l'obtention d'un quotient nul.

Pour coder le nombre N, il faut lire les restes successifs de bas en haut.

Illustration... $\overline{3980}^{10} = \overline{?}^8$

Suite des quotients q_i

Suite des restes r_i

3980	8
497	4
62	1
7	6
0	7

Finalement, $\overline{3980}^{10} = \overline{7614}^8$

Voici une autre façon de présenter les choses :

Nombre à convertir N	Base désirée *b*	
	Quotient de la division de N par *b* (q_0)	Base désirée *b*
	Reste de la division du nombre N par *b* (r_0)	Quotient de la division de q_0 par *b* (q_1)
		Reste de la division de q_0 par *b* (r_1)

Comme pour la première représentation, pour obtenir le nombre dans la base désirée, il nous faut continuer ainsi de suite jusqu'à ce qu'on obtienne un quotient nul. Pour connaître le nombre recherché, il faut lire les restes successifs de bas en haut.

Illustration... $\overline{3980}^{10} = \overline{?}^{8}$

Suite des quotients q_i

3980	8			
	497	8		
	4	62	8	
		1	7	8
			6	0
				7

Suite des restes r_i

Finalement, $\overline{3980}^{10} = \overline{7614}^{8}$

La conversion des **nombres entiers négatifs** fonctionne de la même façon que celle des nombres entiers positifs. Comme vu précédemment, il nous faut juste rajouter le signe"-" pour montrer que l'on parle d'un nombre négatif.

Avec les **nombres décimaux**, pour passer de la base 10 à une base *b*, il faut séparer le nombre en deux parties. La partie entière et la partie décimale.

Le nombre N= $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0 , a_{-1} a_{-2} \dots a_{-m+1} a_{-m}}^{10}$ deviendra alors

$$N = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0}^{10} + \overline{a_{-1} a_{-2} \dots a_{-m+1} a_{-m}}^{10} == \sum_{i=0}^{n} a_i 10^i + \sum_{i=-m}^{-1} a_i 10^i$$

Pour exprimer dans une autre base un nombre décimal, il faut donc effectuer deux démarches.

Premièrement, il faut convertir la partie entière selon la méthode vue précédemment (« *Passage de la base 10 à une base b d'un nombre entier positif* »).

Comme pour la partie entière, il existe plusieurs méthodes pour convertir la partie décimale d'un nombre : on peut convertir la partie décimale algébriquement ou au moyen de tableaux de conversion.

POUR LA METHODE ALGEBRIQUE

Convertissons la partie décimale $\overline{a_{-1} a_{-2} \dots a_{-m+1} a_{-m}}^{10}$ d'un nombre N.

Pour convertir la partie décimale du nombre, nous devons la multiplier par $\frac{b}{b}$, b étant la base finale désirée.

Le numérateur de la fraction obtenue peut s'exprimer comme la somme de sa partie entière (E_1) et de sa partie décimale (D_1).

On recommence la multiplication de D_1 par $\frac{b}{b}$ et sa décomposition en partie entière et décimale. On obtient une suite (E_i, D_i) qui s'arrête à l'obtention d'une partie décimale nulle.

On obtient une représentation polynomiale de la partie décimale, avec des puissances de b négatives.

$$\overline{a_{-1} \dots a_{-m+1} a_{-m}}^{10} = \overline{\frac{b}{b} \times (a_{-1} \dots a_{-m+1} a_{-m})}^{b}$$

$$= \overline{\frac{1}{b} \times (b \times a_{-1} \dots a_{-m+1} a_{-m})}^{b}$$

$$= \overline{\frac{1}{b} \times (E_1 + D_1)}^{b}$$

$$= \overline{\frac{E_1}{b} + \frac{D_1}{b}}^{b}$$

$$= \overline{\frac{E_1}{b} + (\frac{b}{b} \times \frac{D_1}{b})}^{b}$$

$$= \overline{\frac{E_1}{b} + \frac{E_2}{b^2} + \frac{D_2}{b^2}}^{b}$$

...

Pour obtenir la conversion du nombre recherché, il faut additionner la conversion de la partie entière (faite avec la méthode « *Passage de la base 10 à une base b d'un nombre entier positif* ») et la conversion de la partie décimale.

Illustrations…

$$\overline{0,8125}^{10} = \overline{?}^{8}$$

$$\begin{aligned}
\overline{0,8125}^{10} &= \frac{8}{8}\times 0,8125 \\
&= \frac{6,5}{8} \\
&= \frac{6}{8}+\frac{0,5}{8} \\
&= \frac{6}{8}+\frac{8}{8}\times\frac{0,5}{8} \\
&= \frac{6}{8}+\frac{4}{8^2} \\
&= 6.8^{-1}+4.8^{-2} \\
&= \overline{0,64}^{8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{94,8125}^{10} &= \overline{94+0,8125}^{10} \\
\overline{94,8125}^{10} &= (11.8+6\ )+\left(\frac{6}{8}+\frac{0,5}{8}\ \right) \\
&= ((1.8+3).8+6\ )+\left(\frac{6}{8}+\frac{4}{8^2}\ \right) \\
&= 1.8^2+3.8^1+6.8^0+6.8^{-1}+4.8^{-2} \\
&= \overline{136,64}^{8}
\end{aligned}$$

POUR LA METHODE PAR TABLEAUX

Pour la conversion des nombres décimaux par le biais de tableaux, on a relevé une seule représentation :

Partie décimale du nombre à convertir (= Déc.)	Base désirée (b)
Partie décimale de Déc. multiplié par b (D_1)	Partie entière de Déc. multiplié par b (E_1)
Partie décimale de D_1 multiplié par b (D_2)	Partie entière de D_1 multiplié par b (E_2)

Pour obtenir la conversion du nombre, il nous faut continuer ainsi de suite jusqu'à l'obtention d'un nombre entier sans partie décimale. Pour connaître la partie décimale recherchée, il faut lire les parties entières successives de haut en bas. Comme cité plus tôt dans ce document, pour clore le processus, il faut juxtaposer les codages obtenus par la conversion des parties entières et décimales du nombre N.

Illustration… $\overline{94,8125}^{10} = \overline{94+0,8125}^{10} = \overline{?}^{8}$

94	8
11	6
1	3
0	1

8	0,8125
0.5	6
0	4

Parties décimales D_i

Parties entières E_i

Finalement, $\overline{94,8125}^{10} = \overline{136,64}^{8}$

Le passage d'une base à l'autre peut réserver parfois des surprises. C'est ce que montre l'exemple suivant.

$$\overline{3{,}948}^{10} = \overline{3+0{,}948}^{10} = \overline{?}^{8}$$

3	8
0	3

0,948	8
0,584	7
0,672	4
0,376	5
0,008	3
0,064	0
0,512	0
0,096	4
...	...

$$\overline{3{,}948}^{10} = \overline{3{,}7453004...}^{8}$$

On a l'impression que certains nombres rationnels, c'est-à-dire, des nombres dont l'écriture est limitée ou illimitée périodique dans une base b se comportent comme des irrationnels dans une autre base : l'écriture de la partie inférieure à 1 se fait de façon apparemment illimitée.

En réalité, l'écriture de tout nombre rationnel, si elle n'est pas limitée, est illimitée périodique, et ce, quelle que soit la base $b \in \mathbb{N}_{0,1}$. Le caractère périodique ne disparaît donc pas, seule la période peut effectivement changer.

De la même façon, tout nombre irrationnel sera toujours représenté avec une suite illimitée non périodique de chiffres.

Voici divers exemples:

$$\overline{3{,}948}^{10} = \overline{3{,}7453004061115645 7}^{8}$$

Nous observons que ce que nous prenions pour écriture illimitée non périodique est en réalité limitée.

$$\overline{4{,}11...11}^{10} = \overline{4{,}0707...0707}^{8} = \overline{100{,}000111000111...000111}^{2}$$

La période vaut 1 en écriture décimale, 2 en numération octale et 6 en numération binaire.

$$\overline{0{,}6}^{10} = \overline{0{,}12101210...1210}^{3} \text{ et } \overline{0{,}111...1}^{10} = \overline{\frac{1}{9}}^{10} = \overline{0{,}01}^{3}.$$

Ces derniers exemples montrent qu'un rationnel de représentation limitée dans une base peut s'écrire avec une suite illimitée mais périodique dans une autre base.

Conversion d’une base b_1 vers une autre base b_2

Quand **b_1 n'est pas une puissance de b_2**, il n'existe aucune méthode pratique pour passer de la base b_1 à la base b_2. On doit obligatoirement passer par la base 10 pour convertir un nombre.

Par contre, il est possible de simplifier le changement de base quand **b_1 est une puissance de b_2**.

Observons avec l’exemple qui suit. Convertissons un nombre du système octal au système binaire.

Dans ce cas, nous avons $b_1 = 8$ $b_2 = 2$.

Et nous observons que $b_1 = b_2{}^3$.

Baptisons k la puissance à laquelle est élevée b_2.

Ici, k=3.

Voici une méthode rapide pour passer de la base b_1 à la base b_2.

Illustration… $\overline{1345}^{8} = \overline{?}^{2}$

1. Ecrire chaque chiffre du nombre en base b_1 dans une colonne.

2. Exprimer chacun des chiffres de la base b_1 dans la base b_2.

Ici, k=3, il y a donc automatiquement 3 chiffres par colonne. On complète par des « 0 » si nécessaire pour obtenir des assemblages en triplet.

3. Ecrire le nombre final en n'oubliant pas les zéros.

1	3	4	5
$1*2^0$	$1*2^1+1*2^0$	$1*2^2$	$1*2^2+1*2^0$
001	011	100	101

$$\overline{1345}^{8} = \overline{1011100101}^{2}$$

Remarquons qu’il y aura 4 chiffres par colonnes, pour le passage de la base hexadécimale (b_1=16) à la base binaire, car comme $b_1 = b_2{}^4$, k=4.

Illustration… $\overline{2E5}^{16} = \overline{?}^{2}$

1. Ecrire chaque chiffre du nombre en base b_1 dans une colonne.

2. Exprimer chacun des chiffres de la base b_1 dans la base b_2.

Ici, k=4, il y a donc automatiquement 4 chiffres par colonne.

3. Ecrire le nombre final en n'oubliant pas les zéros.

2	E ($=\overline{14}^{10}$)	5
$1*2^1$	$1*2^3+1*2^2+1*2^1$	$1*2^2+1*2^0$
0010	1110	0101

$$\overline{2E5}^{16} = \overline{1011100101}^{2}$$

A l'inverse, pour passer **d'une base b_1 à b_2** quand **b_2 est une puissance de b_1**, il faut fractionner le nombre de départ.

Convertissons un nombre en allant du système binaire vers le système octal.

Dans ce cas, nous avons $b_1=2$ $b_2=8$.

Et nous observons que $b_2 = b_1^3$.

Baptisons k la puissance à laquelle est élevée b_1. Ici, k=3.

Illustration… $\overline{1011100101}^{2} = \overline{?}^{8}$

1. On fractionne le nombre N en parties de k chiffres, en commençant par la droite.

Ici, k=3, on effectue des séparations tous les 3 chiffres.

2. Ensuite, il faut convertir les nombres obtenus dans la base b_2.

3. Enfin, on juxtapose les chiffres obtenus à l'étape 2 et on obtient le nombre final.

$$\overline{1|011|100|101}^{2}$$

001	011	100	101
$1*2^0$	$1*2^1+1*2^0$	$1*2^2$	$1*2^2+1*2^0$
1	3	4	5

$$\overline{1011100101}^{2} = \overline{1345}^{8}$$

Remarquons que la séparation s'effectuera tous les 4 chiffres pour le passage de la base binaire à la base hexadécimale (b_2=16), car, comme $b_2 = b_1^4$, k=4.

Illustration... $\overline{1011100101}^{2} = \overline{?}^{16}$

1. On fractionne le nombre N en parties de k chiffres, en commençant par la droite.

$$\overline{10|1110|0101}^{2}$$

Ici, k=4, on effectue des séparations tous les 4 chiffres.

2. Ensuite, il faut convertir les nombres obtenus dans la base b_2.

10	1110	0101
$1*2^1$	$1*2^3+1*2^2+1*2^1$	$1*2^2+1*2^0$
2	14 = E	5

3. Enfin, on juxtapose les chiffres obtenus à l'étape 2 et on obtient le nombre final.

$$\overline{1011100101}^{2} = \overline{2E5}^{16}$$

Jusqu'ici on a parlé de systèmes de numération assez conventionnels. Il en existe d'autres, plus exotiques et amusants et nous vous en présentons quelques-uns dans cette partie.

Les systèmes d'Avizienis

Les chiffres utilisés dans les systèmes de numération positionnels décrits dans les parties précédentes appartenaient à l'ensemble des naturels. Qu'arrive-t-il si on autorise des entiers négatifs ? Quel avantage y trouve-t-on ?

Voici un système de numération inventé pour faciliter l'addition et autorisant les chiffres négatifs.

Soit $b>1$. Un système de numération d'Avizienis de base b est la donnée d'un ensemble de chiffres C tel que :

1. $C=\{-a,-a+1,\dots,0,\dots,a-1,a\}$
2. $a \in \mathbb{N}$, $a \leq b-1$
3. $b+1 \leq 2a$

L'ensemble C regroupe l'ensemble des chiffres nécessaires pour écrire les nombres en base b. Evidemment, à cause des conditions infligées sur C, les systèmes d'Avizienis ne peuvent être utilisés que sur des bases strictement plus grandes que 2.

Pour chaque base valide, deux possibilités d'ensembles existent.

$$C_b^1 = \{-(b-1),-(b-2),\dots,0,\dots,b-2,b-1\}$$

Ou

$$C_b^2 = \left\{-E\left(\frac{b+1}{2}\right),-E\left(\frac{b}{2}\right),\dots,0,\dots,E\left(\frac{b}{2}\right),E\left(\frac{b+1}{2}\right)\right\}$$

Où $E(x)$ représente la fonction partie entière.

La coexistence de deux ensembles de chiffres et le fait que l'ensemble C_b^1 contienne plus de b éléments fait du système d'Avizienis un système de numération redondant : on peut coder un nombre de plusieurs façons dans celui-ci.

En général, les chiffres négatifs sont représentés surmontés d'une barre.

Illustration… Considérons le système d'Avizienis de base 10.

$$C_{10}^{1}=\{\bar{9},\bar{8},\bar{7},\bar{6},\bar{5},\bar{4},\bar{3},\bar{2},\bar{1},0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}.$$

Dans ce système à base 10, le nombre 6 admet logiquement 6 comme écriture mais également $1\bar{4}$ (10-4=6) ou encore $1\overline{94}$ (100-94=6), $1\overline{994}$, etc.

Nous pouvons utiliser $C_{10}^{2}=\{\bar{5},\bar{4},\bar{3},\bar{2},\bar{1},0,1,2,3,4,5\}$. Dans ce cas, le nombre de possibilités d'écriture est réduit.

Voyons maintenant un système d'Avizienis de base 8.
$C_{8}^{2}=\{\bar{4},\bar{3},\bar{2},\bar{1},0,1,2,3,4\}$

Dans ce système à base 8, le nombre 6 n'admet plus 6 comme écriture mais $1\bar{2}$ (8-2=6).

L'avantage de ce système est qu'il évite les retenues dans les additions.

Plutôt que ce calcul :

		+1		+1
		7	1	4
+		5	4	9
	1	2	6	3

On effectue ce calcul :

	1	$\bar{3}$	1	4
+		5	5	$\bar{1}$
	1	2	6	3

Par ailleurs, le passage d'un nombre N à son opposé –N se fait facilement : il suffit de changer le signe des chiffres du nombre N, ce qui implique qu'il faut additionner pour soustraire.

$$-\bar{1}3\bar{4}2=1\bar{3}4\bar{2}$$

L'avantage cité ci-dessus fait des systèmes d'Avizienis des systèmes très utilisés dans l'informatique et plus spécialement dans le codage, afin de réaliser des économies substantielles sur les temps de calcul.

Base Fibonacci dans la numération de Zeckendorf

Tout le monde connaît la suite des nombres de Fibonacci $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par la formule de récurrence suivante :

$$\begin{cases} F_0 = 1 \\ F_1 = 2 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

La suite se développe comme suit :

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
F_k	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	

La base Fibonacci utilise les valeurs de cette célèbre suite.

On doit cette numération, certes peu pratique, à un de nos compatriotes, Edouard Zeckendorf (1901 -1983), qui énonça ce théorème

« Tout nombre N appartenant aux naturels strictement positifs peut s'écrire sous une et une seule forme d'une somme de nombres non consécutifs de la suite de Fibonacci.»

Voyons par un exemple comment ce système de numération fonctionne.

Illustration... Soit à décomposer N=30.

L'observation de la suite permet d'écrire

30 = 21+8+1

Ou encore $30=1.F_6+0.F_5+1.F_4+0.F_3+0.F_2+0.F_1+1.F_0$

C'est-à-dire 30 = 1010001_Z

On peut donc assimiler cette écriture à une numération positionnelle ne possédant que deux symboles (0 et 1).

En généralisant, nous avons :

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : n = \sum_{i=0}^{k} \varepsilon_i(n).F_i$$

où $\varepsilon_i(n) \in \{0,1\}$ et $\varepsilon_k(n) = 1$,

avec $\varepsilon_i(n).\varepsilon_{i+1}(n) = 0$ *(2 termes consécutifs ne sont pas permis).*

On pourrait pousser l'investigation plus loin en considérant une suite de « Tribonacci » $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et son système de numération de la façon suivante :

$$\begin{cases} T_0 = 1 \\ T_1 = 2 \\ T_3 = 3 \\ T_{n+3} = T_{n+2} + T_{n+1} + T_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Ce qui donnerait ces premières valeurs :

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
T_k	1	2	3	6	11	20	37	68	125	

Illustration... Soit à décomposer N=100.

100 = 68+20+11+1

Ou encore $100 = 1.T_7 + 0.T_6 + 0.T_5 + 1.T_4 + 0.T_3 + 0.T_2 + 0.T_1 + 1.T_0$

C'est-à-dire 100 = 10010001_T

Cette numération positionnelle n'employant que deux chiffres (0 et 1) n'est pas redondante pour autant qu'on interdise une séquence de trois chiffres « 1 » consécutifs dans l'écriture du nombre. Ce principe peut être généralisé à des systèmes de numération de k-bonacci.

Si la numération de Zeckendorf est peu commode à employer dans les opérations usuelles comme l'addition et la multiplication, elle peut se révéler utile dans certains problèmes dont la solution réside dans la décomposition en termes de Fibonacci. Ainsi, une application ludique du théorème de Zeckendorf est le jeu de « Fibonacci-Nim ».

Dans ce jeu, comme dans le jeu de Nim à un tas, des bâtons sont alignés et les joueurs en prélèvent tour à tour un certain nombre en respectant les règles suivantes :

- Si un joueur prend k bâtons, le joueur suivant doit prendre entre 1 et 2k pions.
- Le joueur qui commence doit obligatoirement laisser un pion au premier coup.
- Le joueur qui prend le dernier pion gagne la partie.

La stratégie gagnante repose sur la décomposition du nombre N de bâtons restant sur le plateau en base Fibonacci. Il s'agit en effet de retirer à chaque fois un nombre de bâtons égal au plus petit terme de la décomposition_Z de N et continuer de la sorte en plaçant à chaque coup son adversaire dans une position perdante.

Base en or

Nous avons vu avec le système d'Avizienis que l'on pouvait coder un nombre en base *b* en utilisant un ensemble de chiffres négatifs.

Tout aussi surprenant, il existe des systèmes de numération positionnels employant une base non entière, voire même irrationnelle.

Par exemple, aussi célèbre que la suite de Fibonacci à laquelle il est associé, le nombre d'or φ peut être utilisé comme base de numération. On parle alors dans ce cas de base d'or, ou base phinaire.

Pour rappel, le nombre d'or est l'unique solution positive de l'équation « $x^2=x+1$ » et vaut $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, soit en l'arrondissant au millième $\varphi \sim 1{,}618$ (exprimé dans le système décimal).

Soit $N \in \mathbb{N}_0$. Pour effectuer le développement du nombre N dans la base d'or, il faut utiliser un algorithme glouton, c'est-à-dire comparer N à des puissances décroissantes de φ.

$N>0 \Rightarrow \exists\, n \in \mathbb{N} : \quad \varphi^n \leq N < \varphi^{n+1}$.

Comme $1 < \varphi < 2$, cela signifie automatiquement que

$N= 1.\, \varphi^n + r_n$.

On recommence avec r_n de la même façon.

Il est possible de montrer ce fait remarquable : malgré l'usage d'une base irrationnelle, tous les naturels possèdent une représentation unique (pour autant que l'on évite deux « 1 » consécutifs dans l'écriture du nombre) dans la base phinaire en développement fini, et seuls les chiffres 0 et 1 sont utilisés.

De la même façon, les nombres rationnels possèdent des représentations présentant une périodicité.

Illustrations… Codons 1, 2, 3, 4 et 5 en base phinaire

Il est très facile de coder 1 : $1^{\overline{10}} = 1_\varphi$ car $\varphi^0 = 1$.

Nous observons ensuite que, par définition, (1) $\varphi^2 = \varphi + 1$

En la divisant par φ, nous obtenons cette relation : $\varphi = 1 + \varphi^{-1}$

Et en divisant (1) par φ^2, nous obtenons celle-ci: $1 = \varphi^{-1} + \varphi^{-2}$

On voit ici que, sans la condition de l'évitement des séquences de type « 11 » dans le codage, la base phinaire constituerait un système redondant, puisqu'on pourrait écrire également : $1^{\overline{10}} = 0,11_\varphi$

On peut également en tirer le codage de 2 : $2^{\overline{10}} = \varphi^1 + \varphi^{-2} = 10,01_\varphi$

Ajoutons 1, nous obtenons : $3^{\overline{10}} = \varphi^1 + \varphi^0 + \varphi^{-2} = 11,01_\varphi$

Ajoutons de nouveau $1 = \varphi^2 - \varphi$: $4^{\overline{10}} = \varphi^2 + \varphi^0 + \varphi^{-2} = 101,01_\varphi$

En effectuant $5^{\overline{10}} = 3^{\overline{10}} + 2^{\overline{10}}$, nous obtenons :

$$5^{\overline{10}} = \underbrace{\varphi^1 + \underbrace{(\varphi^1 + \varphi^0)}_{\varphi^2}}_{\varphi^3} + \varphi^{-2} + \varphi^{-2} = \varphi^3 + \varphi^{-1} - \varphi^{-3} + \varphi^{-3} + \varphi^{-4} = \varphi^3 + \varphi^{-1} + \varphi^{-4} = 1000,1001_\varphi$$

Un algorithme de décomposition permet de développer des valeurs décimales.

Illustration… Codons $\frac{1}{2}$ en base phinaire.

$$\varphi^{-2} \le \frac{1}{2} < \varphi^{-1} \Rightarrow \frac{1}{2} = 1.\varphi^{-2} + r_{-2} \text{ avec } 0 < r_{-2} = \frac{1}{2} - \varphi^{-2} < \varphi^{-2}$$

$$r_{-2} \approx 0,118 \Rightarrow \varphi^{-5} < r_{-2} < \varphi^{-4} \Rightarrow r_{-2} = 1.\varphi^{-5} + r_{-5} \text{ avec } 0 < r_{-5} = r_{-2} - \varphi^{-5} < \varphi^{-5}$$

$$r_{-5} \approx 0,028 \Rightarrow \varphi^{-8} < r_{-5} < \varphi^{-7} \Rightarrow r_{-5} = 1.\varphi^{-8} + r_{-8} \text{ avec } 0 < r_{-8} = r_{-5} - \varphi^{-8} < \varphi^{-8}$$

$$r_{-8} \approx 0,007 \Rightarrow \varphi^{-11} < r_{-8} < \varphi^{-10} \Rightarrow r_{-8} = 1.\varphi^{-11} + r_{-11} \text{ avec } 0 < r_{-11} = r_{-8} - \varphi^{-11} < \varphi^{-11}$$

Finalement, $\frac{1}{2} = 1.\varphi^{-2} + 1.\varphi^{-5} + 1.\varphi^{-8} + 1.\varphi^{-11} + \ldots = \sum_{i=0}^{n} \varphi^{-(2+3i)}$

Ou encore : $\frac{1}{2} = 0,01001\overline{001}_\varphi$

Il ne faut pas croire que l'emploi de la base d'or en numération est le fait de mathématiciens excentriques. Elle peut se révéler très utile, notamment dans la mise en place de codes correcteurs d'erreurs dont le rôle est de protéger l'information d'erreurs de transmission ou de stockage, inévitablement rencontrées dans les communications à distance.

Très souvent, le message transmis est numérisé dans un alphabet binaire et ramené à une séquence de bits 0 et 1. Lors de la transmission, d'inévitables parasites détériorent le message et une partie de l'information, des symboles 0 et 1 en quelque sorte sont perdus.

Pour améliorer la fiabilité de la transmission des données, une des méthodes de codage les plus simples est alors de répéter chaque bit : la séquence de bits sera donc répliquée une ou plusieurs fois. C'est cette redondance qui permet la détection et la correction d'erreurs. Lors de la réception du message, le décodeur peut ainsi comparer chaque couple de bits reçus. S'ils sont différents, alors il y a détection d'erreur.

Le caractère redondant de la numération phinaire qui utilise l'alphabet binaire peut être un avantage. Il suffit de coder la même valeur en utilisant plusieurs représentations et ensuite de les comparer à la réception du message.

Les systèmes reposant sur l'emploi d'une base irrationnelle furent introduits en 1957 par le mathématicien George Bergman qui les baptisa « *Tau systems* ».

Juste pour rire... la numération Shadok

La numération Shadok est une invention rigolote tirée du dessin animé "Les Shadoks" créé par Jacques Rouxel.

Celui-ci l'introduit comme suit :

"Les Shadoks ressemblaient à des oiseaux : ils avaient un bec et des pattes mais leurs ailes étaient ridiculement ridicules ! Eduquer les Shadoks n'était pas chose facile. Leurs cerveaux, en effet, avaient une capacité tout à fait limitée. Ils ne comportaient en tout que quatre cases. Et encore, ce n'était pas toujours vrai parce que bien souvent il y en avait de bouchées. Pour remplir les cases déjà, ce n'était pas facile et cela prenait un certain temps. C'est alors que commençait la difficulté parce que, quand les cases étaient pleines, il n'y avait plus de place et le Shadok, on ne pouvait plus rien lui apprendre. Si on essayait quand même, alors obligatoirement il y avait une case qui se vidait pour faire de la place. De sorte que, quand un Shadok avec une tête pleine voulait apprendre quelque chose, il fallait qu'il en oublie une autre. Comme ils n'avaient que quatre cases, évidemment les Shadoks ne connaissaient pas plus de quatre sons : GA BU ZO MEU."

Figure II. 5 :
Une devise Shadok

Vous l'aurez compris, s'ils veulent compter, les Shadoks ne peuvent utiliser que la base 4 ! Avec les conventions suivantes :

0=GA	1= BU	2=ZO	3=MEU

Pour le fun, imaginez ce que peut endurer un Shadok vous souhaitant une bonne année 2014.

Sachant que $\overline{2014}^{10} = \overline{133132}^{4}$, voici le décompte:

BU-MEU-MEU-BU-MEU-ZO !

IV. Les bases dans l'informatique et dans l'électronique

Depuis leur apparition, les systèmes informatiques et électroniques ont fonctionné à l'aide du binaire. Cette base est, en effet, l'unique utilisable pour le traitement des informations par les processeurs. Ces processeurs sont composés de transistors, qui ne peuvent gérer que les deux états du courant : soit le courant est présent, soit il ne l'est pas (on et off). Lorsque le courant passe dans le transistor, l'ordinateur reçoit un message « 1 ». Lorsqu'il ne passe pas, le message envoyé est « 0 ». De cette manière, l'ordinateur peut traiter de grandes quantités d'informations.

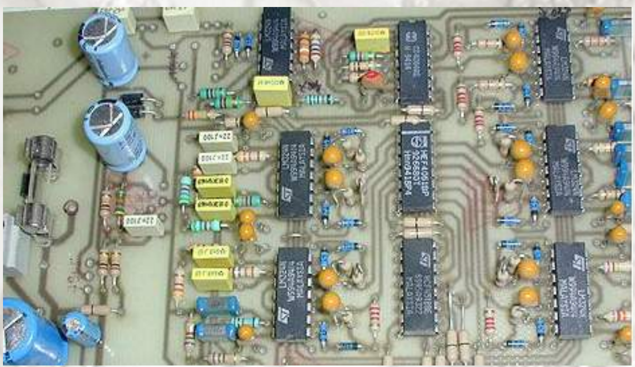


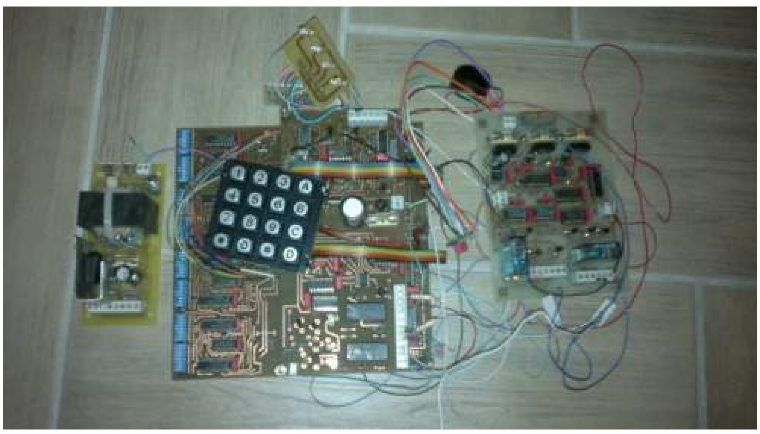
Figure II. 6 : *Les processeurs sont des systèmes automatiques de traitement des informations. Ils manipulent ces informations sous forme de données binaires (groupe de bits).*

1 **0**

Le système de numération binaire est donc parfaitement approprié pour tous les circuits qui, pour des raisons technologiques (passage de courant ou non, sens de polarisation, magnétisation, perforation ou non, vrai ou faux) ne présentent que deux états possibles. Les chiffres 0 et 1 de ce système portent le nom de bits (**BI**nary digi**T**). Un groupe de 8 bits se nomme un octet ou byte et un groupe de 4 bits se nomme un quartet.

Le binaire est aussi très utilisé dans la programmation des systèmes électroniques de la vie courante comme dans les télécommandes, les machines à laver ou encore les serrures à code pour n'en citer que quelques-uns.

Figure II. 7 : *Les serrures à code sont des circuits électroniques fonctionnant dans le système binaire.*



Les trois principaux systèmes

Vous connaissez déjà le système binaire. Deux autres bases sont d'usage en informatique.

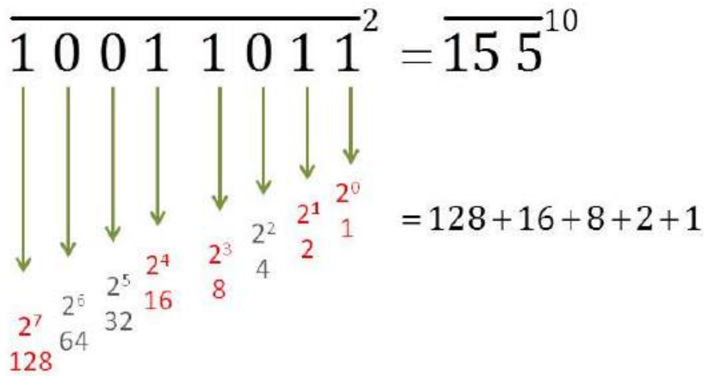
Le système octal n'est plus guère utilisé dans l'informatique et l'électronique. Cependant, on l'utilise quelquefois à la place du système hexadécimal pour ces deux avantages : il peut grouper des séries de trois bits, les rendant plus lisibles, et ne nécessite pas l'emploi de lettre pour les chiffres supérieurs à neuf.

Le système hexadécimal est fort utilisé par les informaticiens et les électroniciens. Cette base est en effet très commode pour les concepteurs de machines fonctionnant grâce au binaire. Elle permet de simplifier la lecture en regroupant les bits par paquet de quatre. De plus, il concorde avec l'octet correspondant à la plus petite unité de stockage adressable. Cet octet équivaut à deux valeurs hexadécimales.

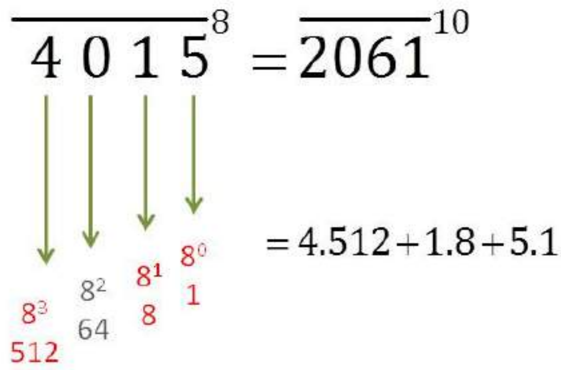
Voici une table présentant les 3 systèmes les plus courants en informatique et électronique ainsi que les chiffres qu'ils emploient pour coder les nombres.

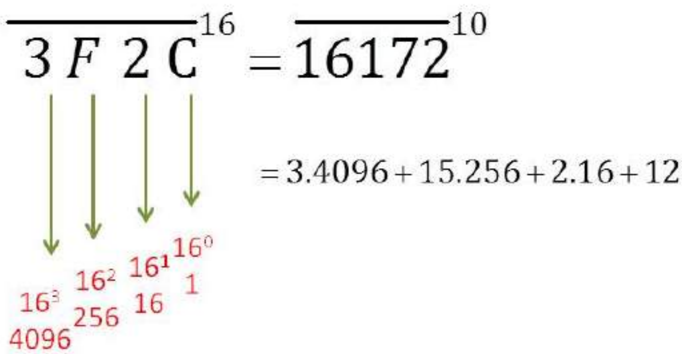
Système	Décimal	Binaire	Octal	Hexadécimal
Base	10	2	8	16
Chiffres	*0,1,2,3,4, 5,6,7,8,9*	*0,1*	*0,1,2,3, 4,5,6,7*	*0,1,2,3,4,5,6,7, 8,9,A,B,C,D,E,F*
	0	0000	0	0
	1	0001	1	1
	2	0010	2	2
	3	0011	3	3
	4	0100	4	4
	5	0101	5	5
	6	0110	6	6
	7	0111	7	7
	8	1000	10	8
	9	1001	11	9
	10	1010	12	A
	11	1011	13	B
	12	1100	14	C
	13	1101	15	D
	14	1110	16	E
	15	1111	17	F

Illustrations…



> ***Anecdote :*** En 1968, un chanteur humoriste, Bobby Lapointe, inventa un système hexadécimal, le **système bibi-binaire** qui était à la fois drôle et cohérent.





Changement de base

Il est inutile de revenir sur la conversion du système décimal vers ces différentes bases et réciproquement. Toutefois, une observation dans le passage de la base binaire, vers la base octale ou hexadécimale est intéressante.

Voyons cela à l’aide d’un exemple.

Il est très simple de convertir un nombre du binaire à l'octal car 8 vaut 2 élevé à la puissance 3.

Nous avons déjà vu à la page 59 comment procéder.

Comme pour l'octal, il est très simple de passer du binaire à l'hexadécimal et vice versa. C'est la raison pour laquelle ce système est fort utilisé en électronique. La base 16 est une forme compacte de la base 2. En effet, la conversion de chaque quartet dans le système hexadécimal offre une représentation contractée, ce qui présente un gros avantage dans les systèmes à grande capacité de mémoire.

Pour simplifier le passage d'un chiffre du binaire en hexadécimal (pour un humain car un ordinateur ne sépare pas les chiffres), nous allons regrouper par quartet.

Illustrations…

$$\overline{\underbrace{1\ 0\ 0\ 1}_{9}\ \underbrace{1\ 0\ 1\ 1}_{B}}^{2} = \overline{9B}^{16}$$

Ou encore $\overline{000111010100}^{2} = \overline{0001\ 1101\ 0100}^{2} = \overline{1\ D\ 4}^{16}$

Codage en BCD

En informatique, il arrive qu'on utilise une version différente du code binaire : le code binaire codé décimal ou BCD. Dans ce système, chaque chiffre décimal est codé individuellement en son équivalent en code binaire naturel sur 4 bits.

Pour passer du code BCD en code décimal, il suffit de regrouper les bits par quartets à partir de la droite et convertir ces paquets de 4 bits en un chiffre décimal.

Illustration…

$$\overline{\underbrace{2}_{0010}\ \underbrace{4}_{0100}\ \underbrace{6}_{0110}}^{10} = \overline{0010\ 0100\ 0110}^{BCD}$$

Les nombres binaires négatifs

Vous pensez sûrement que pour transformer un nombre binaire positif en négatif, il faut simplement ajouter un signe ‘–‘ devant le nombre. Vous n’avez pas totalement tort. Oui, si vous écrivez un nombre en binaire à la main un simple signe ‘–‘ suffit. Mais pour un ordinateur, c’est plus compliqué car il ne sait que gérer les « 0 » et les « 1 » donc malheureusement un vulgaire signe « - » ne fonctionnera pas dans ce cas.

Les informaticiens ont trouvé une solution : le premier bit (le premier chiffre) va nous indiquer le signe du nombre. Si le premier chiffre est un « 0 », le nombre est positif et si le premier chiffre est un « 1 », le nombre est négatif.

Pour les nombres commençant par « 0 », on les lit naturellement.

Pour les nombres commençant par « 1 », on prend l’opposé du bit de poids fort (à l’extrémité gauche) et on ajoute la somme des bites restant sur la droite.

Nombres de 8 bits		**Valeur dans le système décimal**
Lu en hexadécimal	**Lu en binaire**	
7F	0111 1111	127
7E	0111 1110	126
...	...	...
10	0001 0000	16
0F	0000 1111	15
0E	0000 1110	14
0D	0000 1101	13
0C	0000 1100	12
0B	0000 1011	11
0A	0000 1010	10
09	0000 1001	9
08	0000 1000	8
...	...	...
03	0000 0011	3
02	0000 0010	2
01	0000 0001	1
00	0000 0000	0
FF	1111 1111	-1
FD	1111 1110	-2
GC	1111 1101	-3
FE	1111 1100	-4
...	...	...
83	1000 0011	-125
82	1000 0010	-126
81	1000 0001	-127
80	1000 0000	-128

Illustration… $\overline{1001\ 1010}^{2} = \overline{-128+16+8+2}^{10} = \overline{-102}^{10}$

La soustraction dans le système binaire

Dans le chapitre suivant, nous vous montrerons comment effectuer les opérations usuelles dans un système de base *b*, notamment dans le système binaire. Le principe est le même que celui des opérations écrites que vous avez apprises à l'école primaire.

Il existe une méthode de soustraction que les machines emploient et qui consiste à effectuer une addition du premier nombre au complément à 2 du nombre à soustraire. Pour trouver le complément à 2 d'un nombre en binaire, il faut d'abord trouver son complément à 1 en remplaçant simplement les « 0 » par des « 1 » et les « 1 » par des « 0 ». Ensuite, il suffit d'ajouter 1 au nombre trouvé.
Cette méthode ne peut être utilisée que dans des cas où la taille des nombres est limitée.

Illustration…

Soit le nombre N	$\overline{1101\ 1110}^{2}$
Voilà son complément à 1	$\overline{0010\ 0000}^{2}$
Et voici son complément à 2	$\overline{0010\ 0001}^{2}$

Si le nombre à soustraire possède un nombre de bits inférieur à celui du nombre auquel on soustrait, on ajoute des « 0 » à la gauche du nombre que l'on soustrait de sorte à égaler le nombre de chiffres composant les termes de la soustraction.
De plus, si le résultat obtenu possède plus de chiffres que le nombre auquel on soustrait, on ne prend pas en compte les chiffres en surplus depuis la gauche.

Illustration…

$$\overline{0100\ 0100}^{2} - \overline{10\ 1010}^{2} = \ ?$$

$$\overline{0100\ 0100}^{2} - \overline{0010\ 1010}^{2} = \ ?$$

$$\overline{1101\ 0101}^{2}$$

+1

$$\overline{1101\ 0110}^{2}$$ *le complément à 2*

$$\overline{0100\ 0100}^{2} + \overline{1101\ 0110}^{2} = \overline{1\ \boxed{0001\ 1010}}^{2}$$

$$\overline{0100\ 0100}^{2} + \overline{1101\ 0110}^{2} = \overline{0001\ 1010}^{2}$$

Et la mémoire ?

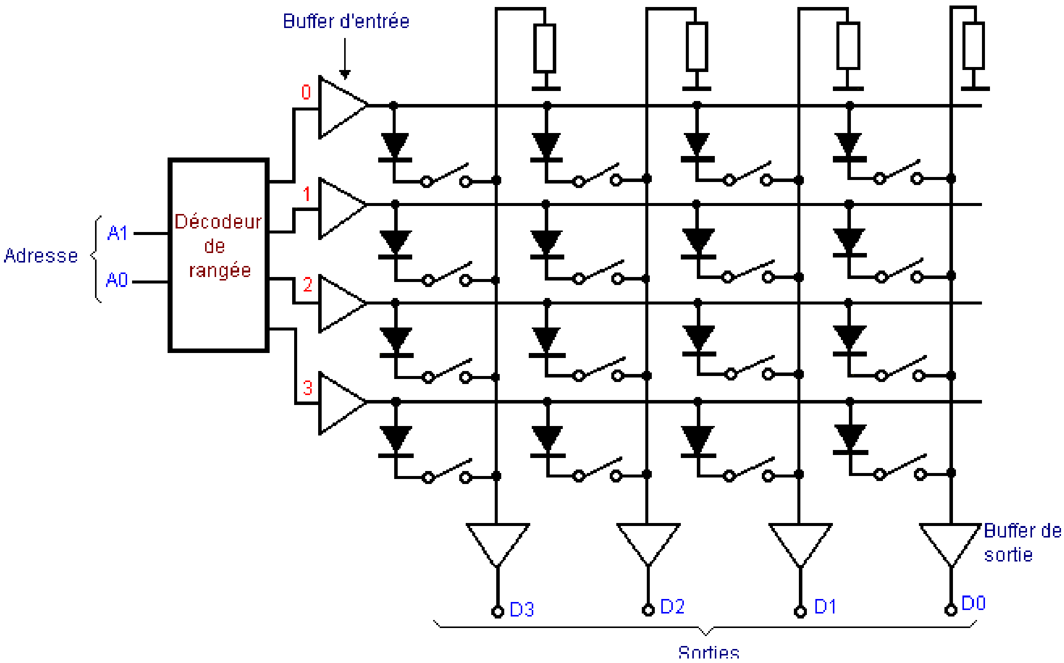


Figure II.8 : *Structure interne d'une mémoire morte à 16 bits disposés en quatre quartets.*

Le schéma ci-dessus montre la structure matricielle interne d'une mémoire à diodes (ROM pour Read Only Memory ou mémoire à lecture seule) de 16 bits (4x4). Les interrupteurs représentés correspondent à la présence d'une diode en fonctionnement s'ils sont fermés et de l'absence de diode s'ils sont ouverts.

Exemple : supposons, pour la première ligne que les interrupteurs de la 1ère et de la 3ème colonne soient fermés. Le principe est d'appliquer un niveau logique « 1 » (message « 1 ») successivement à chaque ligne (ligne 0, puis ligne 1….). Dès lors, dans l'exemple choisi, si nous appliquons un tel niveau logique (1) à la ligne 0, nous allons récupérer un niveau 1 aux sorties D1 et D3, et un niveau logique pour les sorties D0 et D2.

En pratique, aujourd'hui, on utilise dans les ordinateurs des mémoires de plusieurs millions voire milliards de bits. Si on remplace les diodes par des condensateurs (et qu'on adapte la logique de contrôle), nous obtenons alors une mémoire RAM (Random Access Memory pour mémoire à accès aléatoire).

Petite info supplémentaire : en informatique, dans un souci de simplicité, le K devant l'octet (Ko) ne signifie pas 1000 x 1 octet mais 1024 x 1 octet car 1024 est égal à 2^{10} et que 1024 est très proche de 1000 (on emploie un K majuscule à la place d'un k minuscule pour faire une différence entre 1000 et 1024). Le Mo est lui aussi composé de 1024 x 1024 x 1 octet. Cette particularité ne s'applique que dans ces 2 cas.

REGLEMENTS DE COMPTES

ARITHMETIQUE EN BASE b

Nous voici donc arrivés à la question qui a motivé toutes nos recherches : comment les Simpson calculent-ils avec leurs 8 doigts ? Pour y répondre, nous avons adapté au système octal les méthodes qui nous permettent de réaliser nos opérations de tous les jours. C'est ainsi que vous découvrirez dans cette partie des techniques de calcul mental, une preuve par neuf qui n'utilise pas toujours « 9 » et des critères de divisibilité en base b.   Pour parvenir à ces résultats, nous avons utilisé des outils tels que l'arithmétique modulaire, les rubans de Pascal et les automates.

I. OPERATIONS EN BASE B

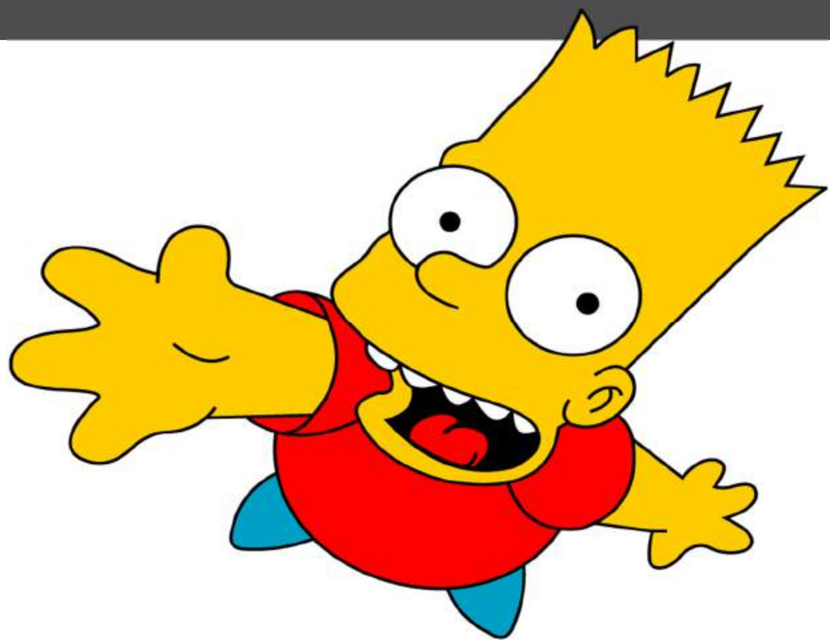


Figure III.1: *Les Simpson possèdent 4 doigts par main. Ils devraient donc employer un système octal.*

Nous savons à présent que notre système est positionnel décimal. Le caractère positionnel où la place du chiffre est décisive dans le nombre détermine bien sûr nos méthodes de calculs, mais quel est l'effet d'un changement de base sur des opérations courantes telles l'addition et la multiplication ?

Propriétés fondamentales

Premièrement, il va de soi que la base ne détermine pas les propriétés algébriques de l'addition et la multiplication. Voici un rappel de ces propriétés.

L'addition usuelle + et la multiplication usuelle x sont, comme vous le savez sûrement, deux lois de **composition interne**.

$$\forall a,b \in \mathbb{R} \rightarrow a+b \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad a \times b \in \mathbb{R}$$

Par ailleurs, quelle que soit la base de numération dans laquelle nous décomposons un nombre, les propriétés de l'addition et de la multiplication dans IR ne changent pas : d'un point de vue algébrique (IR, +, x) est un **champ**.

En effet, (IR, +) est un **groupe commutatif** vérifiant :

L'associativité :

$$\forall x,y,z\in\mathbb{R},(x+y)+z=x+(y+z)$$

La commutativité :

$$\forall x,y\in\mathbb{R},x+y=y+x$$

La présence d'un élément neutre : 0

$$\forall x\in\mathbb{R},x+0=0+x=x$$

La présence d'un symétrique :

$$\forall x\in\mathbb{R},\exists x'\in\mathbb{R}:x+x'=x'+x=0$$

De plus, dans IR, la multiplication

Est **Associative :**

$$\forall x,y,z\in\mathbb{R},(x\times y)\times z=x\times(y\times z)$$

Est **Commutative :**

$$\forall x,y\in\mathbb{R},x\times y=y\times x$$

Possède **un élément neutre : 1**

$$\forall x\in\mathbb{R},x\times 1=1\times x=x$$

Présente **un symétrique pour tout réel non nul :**

$$\forall x\in\mathbb{R}_0,\exists x'\in\mathbb{R}:x\times x'=x'\times x=1$$

Enfin, la loi x est **distributive** par rapport à la loi + :

$$\forall a,b,c\in\mathbb{R}:a\times(b+c)=a\times b+a\times c$$

Et $\forall a,b,c\in\mathbb{R}:(b+c)\times a=b\times a+c\times a$

Ce sont ces propriétés que nous utilisons pour établir les différentes méthodes de calcul mental apprises à l'école primaire.

Pratique de l'addition et de la soustraction

Dans un système de numération positionnel de base b, le nombre de chiffres disponible est limité à b. C'est pour cette raison que notre système décimal emploie 10 symboles (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), que le système binaire majoritairement utilisé en informatique n'en emploie que deux (0 et 1) et que le système octal qu'utiliseraient les Simpson en manipule 8 (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7).

Ainsi, pour additionner des nombres dans une base, il suffit de connaître le résultat de la somme des chiffres du système entre eux et effectuer un report si le résultat est strictement supérieur à b-1.

Voici les tables d'addition pour les systèmes décimal, binaire et octal.

SYSTÈME BINAIRE

+	0	1
0	0	1
1	1	10

SYSTÈME OCTAL

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	10
2	2	3	4	5	6	7	10	11
3	3	4	5	6	7	10	11	12
4	4	5	6	7	10	11	12	13
5	5	6	7	10	11	12	13	14
6	6	7	10	11	12	13	14	15
7	7	10	11	12	13	14	15	16

SYSTÈME DÉCIMAL

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Quand les termes composant l'addition sont codés en utilisant plusieurs chiffres, on peut alors recourir à un **abaque** dans le but de faciliter notre calcul : c'est le principe de l'addition écrite.

En base 10, l'abaque est séparé en différentes colonnes représentant respectivement les unités, les dizaines, les centaines,… ou autrement dit, ces colonnes représentent les unités, les dizaines, les dizaines^2, les dizaines^3,…

Dizaines^n	**Dizaines^{n-1}**	**…**	**Dizaines^2**	**Dizaines**	**Unités**
10^n	**10^{n-1}**	…	**10^2**	**10^1**	**10^0**
…	…		…	…	…

En base b, l'abaque est construit sur le même principe avec différentes colonnes représentant respectivement les unités, les b-aines, les b-aines^2, les b-aines^3,….

Soit un nombre $N = \overline{a_n \ldots a_2 a_1 a_0}^b$ décomposé en base b. Voici comment le placer dans un abaque :

b-aines^n	**b-aines^{n-1}**	**…**	**b-aines^2**	**b-aines**	**Unités**
b^n	**b^{n-1}**	…	**b^2**	**b^1**	**b^0**
a_n	a_{n-1}	…	a_2	a_1	a_0

De plus amples explications…

Lors d'une **addition écrite**, nous superposons les nombres à additionner dans l'abaque. Ensuite, nous effectuons la somme de ces chiffres dans chacune des colonnes (en partant de la colonne la plus à droite, vers la gauche). Lorsque la somme des chiffres d'une colonne **dépasse b-1**, alors nous faisons un report équivalant à la partie entière de la division de la somme obtenue par la base b et nous indiquons dans la colonne ad hoc le reste de cette division.

Voici donc des exemples d'une addition dans les différentes bases dont nous avons étudié les tables d'additions, quelques lignes plus tôt :

SYSTÈME BINAIRE

Reports →			+1	+1		
			1	0	1	1
	+			1	1	0
		1	0	0	0	1

SYSTÈME OCTAL

Reports →				+1	+1	
		2	4	2	3	5
	+	1	3	1	4	7
		3	7	4	0	4

SYSTÈME DÉCIMAL

Reports →		+1			+1	
		1	4	5	2	6
	+	5	7	2	1	9
		7	1	7	4	5

La soustraction peut être également résolue avec l'emploi d'un **abaque**, comme dans l'addition. Le nombre à soustraire est alors toujours placé en seconde ligne dans l'abaque.

Nous soustrayons les différents chiffres colonnes par colonnes en partant du rang de droite. Lorsque le chiffre du nombre à soustraire est inférieur à celui de la première ligne, nous obtenons le résultat directement. Lorsque **le chiffre de la deuxième ligne** d'une colonne est **de valeur supérieure** à **celui de la première ligne** de la même colonne, nous effectuons un **emprunt dans le rang supérieur** et nous ajoutons la valeur b pour pouvoir continuer la soustraction.

Nous venons donc d'apprendre comment effectuer une addition et une soustraction en base b. Mais après réflexion, n'y a-t-il pas moyen de faire encore plus simple ?

En effet, chaque soustraction peut-être perçue comme une addition. C'est ce que nous appellerons la ***complémentation***. Cette méthode est exclusivement utilisée dans la soustraction.

Soustraction par complémentation

Effectuer la complémentation à un nombre quelconque revient à le soustraire à la puissance de b supérieure à celui-ci (on appelle dès lors cette technique la compensation à b).

Ainsi, en base décimale, nous pouvons facilement trouver le complément à 10 de 4231.

Emprunts →			9	9	9	10
		~~1~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~
	-		4	2	3	1
			5	7	6	9

Ainsi, en base octale, trouver le complément d'un nombre à 8, revient à soustraire chaque chiffre de rang n différent de 0 à 7 et le chiffre de rang 0 à 8.

Trouvons donc le complément à 8 de 4231.

		7	7	7	8
-		4	2	3	1
		3	5	4	7

Maintenant, pour utiliser la complémentation dans une soustraction de façon efficace, voici une illustration.

Pour obtenir la différence $x - y$, il faut calculer le complément z à y et ensuite l'ajouter à x. Après cela, nous soustrayons simplement de la somme $(x + z)$ la puissance supérieure dans la base b. Et nous, obtenons le résultat voulu.

PETITS EXEMPLES

En base décimale : $\overline{5014}^{10} - \overline{2231}^{10} = ?$

Nous trouvons le complément de 2231 à 10.

		9	9	9	10
-		2	2	3	1
		7	7	6	9

Nous effectuons l'addition de ce complément à 5014.

Reports →	+1			+1	
		5	0	1	4
+		7	7	6	9
	1	2	7	8	3

Et on soustrait 10 000 de cette somme.

	1	2	7	8	3
-	1	0	0	0	0
		2	7	8	3

Et on conclut :

$$\overline{5014}^{10} - \overline{2231}^{10} = \overline{2783}^{10}$$

En base octale : $\overline{5014}^{8} - \overline{2231}^{8} = ?$

Nous trouvons le complément 2231 à 8.

	7	7	7	8
-	2	2	3	1
	5	5	4	7

Nous effectuons l'addition de cette valeur à 5014.

Reports →	+1			+1	
		5	0	1	4
+		5	5	4	7
	1	2	5	6	3

Et on soustrait $\overline{10000}^{8}$ (qui vaut dans notre système décimal 8^4) de cette somme.

	1	2	5	6	3
-	1	0	0	0	0
		2	5	6	3

Et on conclut :

$$\overline{5014}^{8} - \overline{2231}^{8} = \overline{2563}^{8}$$

Pratique de la multiplication

La multiplication en base 10 n'est pas compliquée. Pour cela, faisons appel à nos connaissances quelques peu … lointaines. En effet, en primaire, le produit de 2 nombres ou plus s'obtenait également grâce à un abaque, en se basant sur deux choses : d'une part, la décomposition du nombre en puissances de dix fournie par le système positionnel décimal, et d'autre part, sur la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

Voici les tables de multiplication pour les systèmes décimal, binaire et octal.

SYSTÈME BINAIRE

x	0	1
0	0	0
1	0	1

SYSTÈME OCTAL

x	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	10	12	14	16
3	0	3	6	11	14	17	22	25
4	0	4	10	14	20	24	30	34
5	0	5	12	17	24	31	36	43
6	0	6	14	22	30	36	44	52
7	0	7	16	25	34	43	52	61

Attention, ces nombres sont à lire en base 8 !

SYSTÈME DÉCIMAL

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81

De plus amples explications…

Lors d'une **multiplication écrite**, nous superposons les nombres à multiplier dans l'abaque.

Nous utilisons la distributivité dans la multiplication pour calculer ce produit.

Ensuite, nous commençons par multiplier le nombre de la première ligne par le premier chiffre de la seconde ligne. Nous recommençons ainsi avec tous les chiffres de la seconde ligne tout en écrivant les réponses de chaque produit obtenu l'une en dessous de l'autre ; tout en n'oubliant pas de décaler chaque réponse d'une colonne au fur et à mesure que nous les obtenons, cela, pour respecter le système de position.

Après cela, effectuons la somme des réponses dans un nouvel abaque.

Mais lorsque le produit des chiffres de même rang est supérieur à b, nous faisons un report du nombre de b-aines vers le chiffre directement à gauche dans la réponse (cf. le report dans l'addition en base b à la page 81).

SYSTÈME BINAIRE

		1	0	0	1
x				1	1
		1	0	0	1
+	1	0	0	1	
	1	1	0	1	1

SYSTÈME OCTAL

		1	4	2	3
x				1	2
		3	0	4	6
+	1	4	2	3	
	1	7	2	7	6

SYSTÈME DÉCIMAL

		1	4	2	3
x				1	2
		2	8	4	6
+	1	4	2	3	
	1	7	0	7	6

Au cours de l'histoire, ne disposant pas de machine à calculer, les mathématiciens ont rivalisé de génie pour trouver des méthodes permettant un calcul mental rapide et de plus en plus facile à pratiquer.

A l'école primaire, nos instituteurs se sont employés à nous apprendre ces techniques, qui reposent pour la plupart sur l'emploi de la base.

Nous allons ici vous rappeler plusieurs techniques que vous avez apprises dans votre enfance, mais nous les généraliserons à la **base *b*** et l'illustrerons dans des bases différentes.

La compensation

C'est une opération importante. En effet, la compensation permet de calculer assez rapidement des sommes, produits… en simplifiant le calcul sans en changer le résultat final.

LA COMPENSATION « CROISÉE »

Lorsque l'on se retrouve face à une addition plus compliquée à effectuer, nous utiliserons ce que l'on définit comme « la compensation croisée ». C'est-à-dire que, lorsqu'un des termes de la somme est difficile à additionner, nous allons lui ajouter une certaine valeur pour simplifier ce calcul.

Mais pour maintenir le résultat final, nous devons *compenser* en soustrayant cette valeur, ajoutée, au second terme. Ainsi, la somme de ces deux termes sera plus aisée…

Illustrations…

En base décimale[1]

$$299\,993 + 456\,728 = ?$$

$$=(299\,993 \mathbf{+ 7}) + (456\,728 \mathbf{- 7})$$

$$= 300\,000 + 456\,721 = 756\,721$$

En base octale

$$\overline{277777}^{8} + \overline{123\,521}^{8} = ?$$

$$=\left(\overline{277777}^{8} + \overline{1}^{8}\right) + \left(\overline{123\,521}^{8} - \overline{1}^{8}\right)$$

$$= \overline{300000}^{8} + \overline{123520}^{8} = \overline{423520}^{8}$$

[1] Pour faciliter la lecture, nous conservons la notation usuelle des nombres en base 10.

La compensation « parallèle »

De même que dans l'addition, nous nous retrouvons souvent face à une différence difficile à effectuer de tête. Nous pouvons alors utiliser « la compensation parallèle ».

Par cela, lorsque nous devons calculer une différence, compenser peut simplifier le calcul sans altérer le résultat final.

Ainsi, pour faire une compensation parallèle, nous allons simplement ajouter une certaine valeur à un des termes. Mais, dans ce cas-là, dans la soustraction, il faut rajouter cette valeur à l'autre terme pour maintenir le résultat correct.

Illustrations…

En base décimale

456 730 - 299 993 = ?

=(456 730 **+ 7**) - (299 993 **+7**)

=456 737 - 300 000 =156 737

En base octale

$$\overline{123\,521}^{8} - \overline{17777}^{8} = ?$$

$$= \left(\overline{123\,521}^{8} + \overline{1}^{8}\right) - \left(\overline{17777}^{8} + \overline{1}^{8}\right)$$

$$= \overline{123\,522}^{8} - \overline{20000}^{8} = \overline{103522}^{8}$$

La compensation dans la multiplication

Pour simplifier un produit, on va multiplier ou diviser un de ses termes par une valeur précise… Dans ces cas-ci, il faudra alors respectivement diviser ou multiplier l'autre terme par cette valeur, pour conserver l'égalité.

Illustrations…

En base décimale

0.25 x 12 488= ?

= (0.25 **x 4**) x (12 488 **: 4**)

=1 x 3 122 = 3 122

En base octale

$$\overline{0{,}20}^{8} \times \overline{1044}^{8} = ?$$

$$= \left(\overline{0{,}20}^{8} \times \overline{4}^{8}\right) \times \left(\overline{1044}^{8} : \overline{4}^{8}\right)$$

$$= \overline{1}^{8} \times \overline{211}^{8} = \overline{211}^{8}$$

La compensation dans la division

Comme expliqué plus tôt, la compensation dans la multiplication vise à faciliter le calcul. C'est aussi à cela que sert son homologue, la compensation dans la division.

Pour simplifier une division, nous allons également multiplier ou diviser un de ses facteurs par une valeur intéressante … Mais il faudra alors respectivement multiplier ou diviser l'autre facteur par cette valeur spécifique.

Illustrations…

En base décimale

250 500 : 1500 = ?

= (250 500 : 500) : (1500 : 500)

= 501 : 3 = 167

En base octale

$$\overline{66667400}^8 : \overline{2400}^8 = ?$$

$$= \left(\overline{66667400}^8 : \overline{400}^8\right) : \left(\overline{2400}^8 : \overline{400}^8\right)$$

$$= \overline{155557}^8 : \overline{5}^8 = \overline{25743}^8$$

L'utilisation d'opérateurs

Les opérateurs en base b peuvent aussi être très utiles en calcul mental car ils permettent, un peu comme la compensation de faciliter l'opération à effectuer.

a) En effet, si nous devons effectuer une addition $x + y$ où le nombre y à ajouter est $b^k - 1$,… nous préfèrerons calculer $(x+b^k)-1$.

De même, si on effectue une addition $x + y$ où le nombre y à ajouter est $b^k + 1$,… nous calculerons alors $(x+b^k)+1$.

b) Basé sur le même principe que dans l'addition, si nous devons effectuer une soustraction $x - y$ où le nombre y à soustraire est $b^k - 1$,… nous préfèrerons calculer $(x-b^k)+1$.

De même, si nous effectuons une addition $x - y$ où le nombre y à soustraire est $b^k + 1$,… nous calculerons $(x-b^k)-1$.

Illustrations…

En base décimale

$525 \pm 99 = ?$

$=(525 \pm \mathbf{100}) \mp \mathbf{1}$

$= 624$ (si $525 + 99$) ou

$=426$ (si $525 - 99$)

$525 \pm 101 = ?$

$(525 \pm \mathbf{100}) \pm \mathbf{1} = ?$

$= 626$ (si $525 + 101$) ou

$=424$ (si $525 - 101$)

En base octale…

$$\overline{453}^{8} \pm \overline{77}^{8} = ?$$

$$=\left(\overline{453}^{8} \pm \overline{100}^{8}\right) \mp \overline{1}^{8}$$

$$=\overline{552}^{8} \ (\text{si } \overline{453}^{8} + \overline{77}^{8})$$

$$=\overline{354}^{8} \ (\text{si } \overline{453}^{8} - \overline{77}^{8})$$

$$\overline{453}^{8} \pm \overline{101}^{8} = ?$$

$$=\left(\overline{453}^{8} \pm \overline{100}^{8}\right) \pm \overline{1}^{8}$$

$$=\overline{554}^{8} \ (\text{si } \overline{453}^{8} + \overline{101}^{8})$$

$$=\overline{352}^{8} \ (\text{si } \overline{453}^{8} - \overline{101}^{8})$$

c) En ce qui concerne la multiplication et la division, si un des facteurs est b^k ; il suffit alors de faire respectivement glisser vers la gauche/droite le nombre de k cases dans l'abaque.

Illustrations…

En base décimale

525 x 100 = ?

				5	2	5
x				1	0	0
		5	2	5	0	0

525 :100 = ?

	5	2	5	,0	0	0
:	1	0	0	,0	0	0
			5	,2	5	0

En base octale

$\overline{525}^{8} \times \overline{100}^{8} = ?$

				5	2	5
x				1	0	0
		5	2	5	0	0

$\overline{525}^{8} : \overline{100}^{8} = ?$

	5	2	5	,0	0	0
:	1	0	0	,0	0	0
			5	,2	5	0

d) Un autre des opérateurs dans la multiplication est b^k-1 ; il suffit alors de faire respectivement glisser vers la gauche le nombre N de k cases dans l'abaque et de soustraire 1 fois le nombre initial.

Autrement dit, $N \times (b^k -1) = N \times b^k - (N \times 1)$

Illustrations…

En base décimale

526 x 999= ?

=526 x 1000 – (526 x 1)

=526 000 – 526 = 525 474

En base octale

$$\overline{526}^{8} \times \overline{777}^{8} = ?$$

$$= \left(\overline{526}^{8} \times \overline{1000}^{8}\right) - \overline{526}^{8}$$

$$= \overline{526000}^{8} - \overline{526}^{8} = \overline{525252}^{8}$$

Suivant le même principe, lorsque nous devons effectuer :

N x*(0,* (b^k -1))

A ce moment-là, la formule générale devient :

$$N \times (0, (b^k - 1)) = N \times 1 - (N \times \frac{1}{b^k})$$

Illustrations…

En base décimale

526 x 0,999 = ?

$$=526 \times 1 - (526 \times \frac{1}{10^3})$$

=526– 0,526 = 525 ,474

En base octale

$$\overline{526}^{8} \times \overline{0{,}777}^{8} = ?$$

$$= \left(\overline{526}^{8} \times \overline{1}^{8}\right) - \left(\overline{526}^{8} \times \overline{\frac{1}{10^3}}^{8}\right)$$

$$= \overline{526}^{8} - \overline{0{,}526}^{8} = \overline{525{,}252}^{8}$$

Le principe général des opérateurs est de toujours essayer de se ramener à un énoncé où *b (la base)* est présente.

Tableau récapitulatif de quelques opérateurs fondamentaux

Opérateurs en base 10	Calculs à réaliser	Opérateurs en base 8
N x 9	N x 10 – (N x 1)	N x $\overline{7}^{8}$
N x 90	N x 100 – (N x 10)	N x $\overline{70}^{8}$
N x 99	N x 100 – (N x 1)	N x $\overline{77}^{8}$
N x 900	N x 1000 – (N x 100)	N x $\overline{700}^{8}$
N x 999	N x 1000 – (N x 1)	N x $\overline{777}^{8}$
N x 0,9	N x 1 – (N x $\frac{1}{10}$)	N x $\overline{0,7}^{8}$
N x 9,9	N x 10 – (N x $\frac{1}{10}$)	N x $\overline{7,7}^{8}$
N x 0,99	N x 1 – (N x $\frac{1}{100}$)	N x $\overline{0,77}^{8}$

Pour aller plus loin… posons-nous encore une petite question…

Que deviendrait un nombre N si on le multipliait/divisait par q ou q^k, q étant un diviseur de la base b ?

D'une part, pour multiplier un nombre quelconque N par q^k,
il suffirait donc de transformer le calcul initial : $N \times q^k$ *en* un calcul incluant la base.

Autrement dit, $(N \times (b^k)) : r^k$ où $r = \frac{b}{q}$

Illustrations…

En base décimale

$$16 \times 5^3 = (16 \times 10^3) : 2^3 = (16 \times 1000) : 8 = 2000$$

En base octale

$$\overline{6}^{8} \times \overline{4^3}^{8} = \left(\overline{6}^{8} \times \overline{1000}^{8}\right) : \overline{2^3}^{8} = \left(\overline{6}^{8} \times \overline{1000}^{8}\right) : \overline{10}^{8}$$

$$= \overline{600}^{8}$$

D'autre part, pour diviser un nombre quelconque N par q^k ; il suffirait donc de transformer le calcul initial $(N : q^k)$ en un calcul incluant la base.

Autrement dit, $(N : (b^k)) \times r^k$ où $r = \dfrac{b}{q}$

Illustrations…

En base décimale

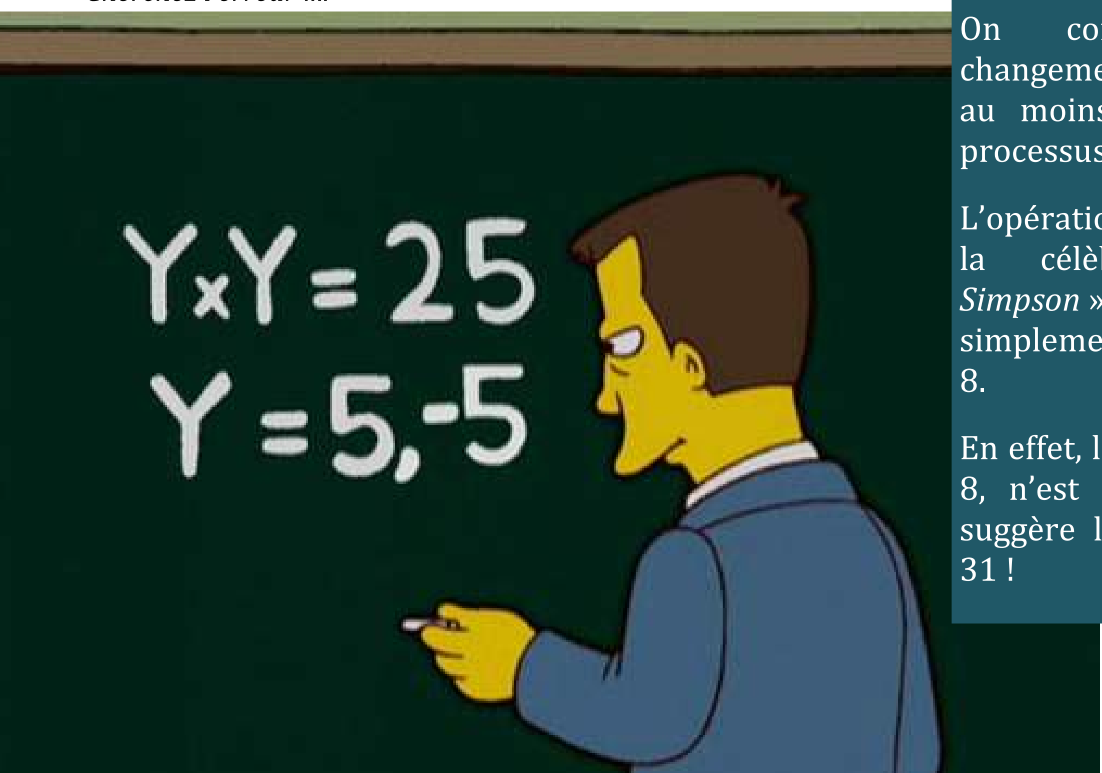
$$120 : 5^2 = (120 : 10^2) \times 2^2 = 1{,}2 \times 4 = 4{,}8$$

En base octale

$$\overline{120}^{8} : \overline{4^3}^{8} = \left(\overline{120}^{8} : \overline{1000}^{8}\right) \times \overline{2^3}^{8} = \left(\overline{0{,}120}^{8}\right) \times \overline{10}^{8}$$

$$= \overline{1{,}2}^{8}$$

Figure III. 2: *Une équation à l'école de Springfield. Cherchez l'erreur ….*



On constate que le changement de base modifie au moins en apparence le processus des opérations.

L'opération ci-contre, tirée de la célèbre série « *Les Simpson* » est tout simplement erronée en base 8.

En effet, le carré de 5 en base 8, n'est pas 25, comme le suggère l'image, mais plutôt 31 !

À l'école primaire, on apprend aux enfants que si la somme des chiffres d'un nombre est divisible par 3 alors ce nombre sera divisible par 3. La syntaxe du nombre, c'est-à-dire la façon dont il s'écrit, renseigne sur les propriétés de celui-ci. Mais comment arrive-t-on à un tel résultat ? Quel est le lien entre ces deux opérations - somme et division - qui, à première vue, n'ont aucun point commun ? Et surtout, quel effet peut avoir un changement de base dans la reconnaissance de ces propriétés ? Nous allons vous montrer, grâce aux propriétés de l'arithmétique modulaire, ce qu'il en est réellement.

Divisibilité par la base b

CRITÈRE DE DIVISIBILITÉ PAR 10 EN BASE 10

Un nombre N est divisible par 10, en base 10, lorsque le chiffre de rang nul de N est nul.

$$\forall N \in \mathbb{Z} : N = \overline{a_n \ldots a_0}^{10}$$

$$10 | N \Leftrightarrow a_0 = 0$$

En effet, $10 \mid \mathrm{N} \Leftrightarrow N \equiv 0 \bmod 10$ (1)

Or, $\mathrm{N} = \sum_{i=0}^{n} (a_i . 10^i)$

(1) $\Leftrightarrow$ $10 \mid \mathrm{N} \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} (a_i . 10^i) \equiv 0 \bmod 10$

En vertu de la compatibilité de la congruence avec l'addition, la multiplication et les puissances,

$$\sum_{i=0}^{n} (a_i . 10^i) \equiv \left[\sum_{i=0}^{n} ((a_i . 10^i) \bmod 10) \right] \bmod 10 \equiv \left[\sum_{i=0}^{n} ((a_i \bmod 10).(10^i \bmod 10)) \right] \bmod 10$$

Nous savons que $\forall i \in N_0 : 10^i \equiv 0 \bmod 10$ car $10 \mid 10$.

Donc,

$$\sum_{i=0}^{n} (a_i . 10^i) \equiv \left[(a_0 \bmod 10).(10^0 \bmod 10) \right] \bmod 10 \equiv \left[(a_0 \bmod 10).1 \right] \bmod 10 \equiv a_0 \bmod 10$$

Et comme on travaille en base 10, $0 \leq a_0 < 10 \Rightarrow \left(a_0 \bmod 10 \equiv 0 \bmod 10 \Leftrightarrow a_0 = 0 \right)$

Finalement, $\boxed{10 \mid \mathrm{N} \Leftrightarrow a_0 = 0}$

En base 10, 10 divise un nombre N **si et seulement si** le chiffre de rang nul est égal à 0.

CRITÈRE DE DIVISIBILITÉ PAR b EN BASE b

Un nombre N est divisible par b, en base b, lorsque le chiffre de rang nul de N est nul.

$$\forall N \in \mathbb{Z} : N = \overline{a_n ... a_0}^{\,b}$$

$$b | N \Leftrightarrow a_0 = 0$$

En effet, b | N $\Leftrightarrow N \equiv 0 \, mod \, b$ (1)

Or, N = $\sum_{i=0}^{n} (a_i . b^i)$

(1) $\Leftrightarrow$ b | N $\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} (a_i . b^i) \equiv 0 \, mod \, b$

En vertu de la compatibilité de la congruence avec l'addition, la multiplication et les puissances,

$$\sum_{i=0}^{n} (a_i . b^i) \equiv \left[\sum_{i=0}^{n} ((a_i . b^i) mod \, b) \right] mod \, b \equiv \left[\sum_{i=0}^{n} ((a_i \, mod \, b).(b^i \, mod \, b)) \right] mod \, b$$

Nous savons que $\forall i \in N_0 : b^i \equiv 0 \, mod \, b$ car b | b.

Donc, $\sum_{i=0}^{n} (a_i . b^i) \equiv \left[(a_0 \, mod \, b).(b^0 \, mod \, b) \right] mod \, b \equiv \left[(a_0 \, mod \, b).1 \right] mod \, b \equiv a_0 \, mod \, b$

Et comme on travaille en base b, $0 \leq a_0 < b \Rightarrow a_0 \, mod \, b \equiv 0 \, mod \, b \Leftrightarrow a_0 = 0$

Finalement, $\boxed{b \mid N \Leftrightarrow a_0 = 0}$

En base b, b divise un nombre N **si et seulement si** le chiffre de rang nul est égal à 0.

Illustrations…

En base décimale

1250 est divisible par 10.

En base octale

$\overline{170}^{\,8}$ est divisible par $\overline{10}^{\,8} = \overline{8}^{\,10}$.

CRITÈRE DE DIVISIBILITÉ PAR b^k EN BASE b

Un nombre N est divisible par b^k ($k \in \mathbb{N}_0$) en base b, lorsque les k derniers chiffres formant le nombre N sont nuls.

$$\forall N \in \mathbb{Z} : N = \overline{a_n ... a_0}^{\,b}$$

$$b^k \mid N \Leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N} : i < k \Rightarrow a_i = 0$$

En effet, $\quad b^k \mid N \Leftrightarrow N \equiv 0 \bmod b^k \qquad (1)$

Or, $\quad N = \sum_{i=0}^{n}(a_i.b^i)$

$$(1) \Leftrightarrow \quad b^k \mid N \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n}(a_i.b^i) \equiv 0 \bmod b^k$$

$$\sum_{i=0}^{n}(a_i.b^i) \equiv \left[\sum_{i=0}^{n}((a_i.b^i) \bmod b^k)\right] \bmod b^k \equiv \left[\sum_{i=0}^{n}((a_i \bmod b^k).(b^i \bmod b^k))\right] \bmod b^k$$

Nous savons que $\quad \forall i \in N_0$ tel que $i \geq k : b^i \equiv 0 \bmod b^k$

Donc,

$$\sum_{i=0}^{n}(a_i.b^i) \equiv \left[\sum_{i=0}^{k-1}((a_i.b^i) \bmod b^k) + \sum_{i=k}^{n}((a_i.b^i) \bmod b^k)\right] \bmod b^k \equiv \left[\sum_{i=0}^{k-1}((a_i.b^i) \bmod b^k)\right] \bmod b^k$$

Or, $\quad \sum_{i=0}^{k-1} a_i.b^i < b^k$.

Donc, $\quad \sum_{i=0}^{k-1} a_i.b^i \equiv 0 \bmod b^k \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{k-1} a_i.b^i = 0$

ou encore $\quad a_i = 0 \quad \forall i \in \{0,...,k-1\}$

Finalement $\quad \boxed{b^k \mid N \Leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N} : i < k \Rightarrow a_i = 0}$

En base b, b^k divise un nombre N **si et seulement si** les chiffres de rangs strictement inférieurs à k sont égaux à 0.

Critères de divisibilité par un diviseur q de la base b

Critère de divisibilité par 2 en base 10

Un nombre N est divisible par 2, en base 10, lorsque le chiffre de rang nul de N est divisible par 2.

$$\forall N \in \mathbb{Z} : N = \overline{a_n ... a_0}^{10}$$

$$2 | N \Leftrightarrow 2 | a_0$$

En effet, $2 \mid N \Leftrightarrow N \equiv 0 \bmod 2 \qquad (1)$

Or, $N = \sum_{i=0}^{n} (a_i.10^i)$

$(1) \Leftrightarrow \qquad 2 \mid N \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} (a_i.10^i) \equiv 0 \bmod 2$

En vertu de la compatibilité de la congruence avec l'addition, la multiplication et les puissances,

$$\sum_{i=0}^{n} (a_i.10^i) \equiv \left[\sum_{i=0}^{n} ((a_i.10^i) \bmod 2) \right] \bmod 2 \equiv \left[\sum_{i=0}^{n} ((a_i \bmod 2).(10^i \bmod 2)) \right] \bmod 2$$

Nous savons que $\forall i \in N_0 : 10^i \equiv 0 \bmod 2$ car $2 \mid 10$.

Donc, $\sum_{i=0}^{n} (a_i.10^i) \equiv \left[(a_0 \bmod 2).(10^0 \bmod 2) \right] \bmod 2 \equiv \left[(a_0 \bmod 2).1 \right] \bmod 2 \equiv a_0 \bmod 2$

Finalement, $\boxed{2 \mid N \Leftrightarrow a_0 \equiv 0 \bmod 2}$

En base 10, 2 divise un nombre N **si et seulement si** le chiffre de rang nul de N est divisible par 2.

Critère de divisibilité par 5 en base 10

Tout comme 2, 5 est un diviseur de 10. De la même façon, nous obtenons le critère de divisibilité suivant

$$\boxed{5 \mid N \Leftrightarrow a_0 \equiv 0 \bmod 5}$$

En base 10, 5 divise un nombre N **si et seulement si** le chiffre de rang nul de N est divisible par 5.

GÉNÉRALISATION EN BASE b

Un nombre N est divisible par q, en base b, si q divise b, lorsque le chiffre de rang nul de N est divisible par q.

$$\forall N \in \mathbb{Z} : N = \overline{a_n ... a_0}^{b}$$

$$q | N \Leftrightarrow q | a_0$$

En effet, $q \mid N \Leftrightarrow N \equiv 0 \bmod q$ (1)

Or, $N = \sum_{i=0}^{n} (a_i . b^i)$

(1) $\Leftrightarrow$ $q \mid N \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} (a_i . b^i) \equiv 0 \bmod q$

En vertu de la compatibilité de la congruence avec l'addition, la multiplication et les puissances,

$$\sum_{i=0}^{n} (a_i . b^i) \equiv \left[\sum_{i=0}^{n} ((a_i . b^i) \bmod q) \right] \bmod q \equiv \left[\sum_{i=0}^{n} ((a_i \bmod q).(b^i \bmod q)) \right] \bmod q$$

Nous savons que $\forall i \in N_0 : b^i \equiv 0 \bmod q$ car q | b.

Donc,

$$\sum_{i=0}^{n} (a_i . b^i) \equiv \left[(a_0 \bmod q).(b^0 \bmod q) \right] \bmod q \equiv \left[(a_0 \bmod q).1 \right] \bmod q \equiv a_0 \bmod q$$

Finalement, $\boxed{q \mid N \Leftrightarrow a_0 \equiv 0 \bmod q}$

En base b, q, diviseur de b, divise un nombre N **si et seulement si** le chiffre de rang nul de N est divisible par q.

CRITÈRE DE DIVISIBILITÉ PAR 4 EN BASE 8

Un nombre N est divisible par 4, en base 8, lorsque le chiffre de rang nul est divisible par 4.

$$\forall N \in \mathbb{Z} : N = \overline{a_n ... a_0}^{8}$$

$$4 | N \Leftrightarrow 4 | \overline{a_0}^{8}$$

En effet, $4 \mid N \Leftrightarrow N \equiv 0 \bmod 4$ (1)

Or, $$N = \sum_{i=0}^{n}(a_i.8^i)$$

$$(1) \Leftrightarrow \qquad 4 \mid N \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n}(a_i.8^i) \equiv 0 \, mod\, 4$$

De ce fait,

$$\sum_{i=0}^{n}(a_i.8^i) \equiv \left[\sum_{i=0}^{n}((a_{i.}.8^i) mod\, 4)\right] mod\, 4 \equiv \left[\sum_{i=0}^{n}((a_i\, mod\, 4).(8^i\, mod\, 4))\right] mod\, 4$$

Nous savons que $\forall i \in N_0 : 8^i \equiv 0\, mod\, 4$ car $4 \mid 8$.

Donc, $\sum_{i=0}^{n}(a_i.8^i) \equiv \left[(a_0\, mod\, 4).(8^0\, mod\, 4)\right] mod\, 4 \equiv \left[(a_0\, mod\, 4).1\right] mod\, 4 \equiv a_0\, mod\, 4$

Finalement, $\boxed{4 \mid N \Leftrightarrow a_0 \equiv 0 \mathrm{mod} 4}$

En base 8, 4 divise un nombre N **si et seulement si**
le chiffre de rang nul de N est divisible par 4.

Critère de divisibilité par 2 en base 8

2 est un autre diviseur de 8. De la même façon, nous obtenons le critère de divisibilité suivant

$$\boxed{2 \mid N \Leftrightarrow a_0 \equiv 0 \mathrm{mod} 2}$$

En base 8, 2 divise un nombre N **si et seulement si**
le chiffre de rang nul de N est divisible par 2.

Illustrations…

En base décimale

725 est divisible par 5.

823 ne l'est pas.

En base octale

$\overline{154}^{8}$ est divisible par 4.

$\overline{16}^{8}$ ne l'est pas.

Critères de divisibilité par une pème puissance d'un diviseur q de la base b

CRITÈRE DE DIVISIBILITÉ PAR 4 EN BASE 10

Un nombre N est divisible par 4, en base 10, lorsque le nombre formé par les deux derniers rangs de N est divisible par 4.

$$\forall N \in \mathbb{Z} : N = \overline{a_n ... a_0}^{10}$$

$$4 | N \Leftrightarrow 4 | \overline{a_1 a_0}^{10}$$

En effet, $4 \mid \mathrm{N} \Leftrightarrow N \equiv 0 mod 4$ (1)

Or, $\mathrm{N} = \sum_{i=0}^{n} (a_i .10^i)$

(1) $\Leftrightarrow$ $4 \mid \mathrm{N} \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} (a_i .10^i) \equiv 0 mod 4$

Par conséquent,

$$\sum_{i=0}^{n} (a_i .10^i) \equiv \left[\sum_{i=0}^{n} ((a_{i.} .10^i) mod 4) \right] mod 4 \equiv \left[\sum_{i=0}^{n} ((a_i mod 4).(10^i mod 4)) \right] mod 4$$

Nous savons que $\forall i \in N_0$ tel que $i \geq 2 : 10^i \equiv 0 \bmod 4$

car si $2|10$ alors $2^2|10^2$

$$\sum_{i=0}^{n} (a_i .10^i) \equiv \left[\sum_{i=0}^{1} ((a_{i.} .10^i) \mathrm{mod} 4) + \sum_{i=2}^{n} ((a_{i.} .10^i) \mathrm{mod} 4) \right] \mathrm{mod} 4 \equiv \left[\sum_{i=0}^{1} ((a_i .10^i) \mathrm{mod} 4) + 0 \right] \mathrm{mod} 4$$

Finalement, $\boxed{4 \mid \mathrm{N} \Leftrightarrow 4 | \overline{a_1 a_0}}$

En base 10, 4 divise un nombre N **si et seulement si** le nombre formé par les chiffres des deux derniers rangs de N est divisible par 4.

CRITÈRE DE DIVISIBILITÉ PAR 8 EN BASE 10

Si $4=2^2$ en base 10, nous savons que $8=2^3$ en base 10. Nous déduisons un critère de divisibilité par 8 de façon semblable à ce que nous avons fait pour 4.

$$\forall N \in \mathbb{Z} : N = \overline{a_n ... a_0}^{10}$$

$$8 \mid N \Leftrightarrow 8 \mid \overline{a_2 a_1 a_0}^{10}$$

En base 10, 8 divise un nombre N **si et seulement si** le nombre formé par les chiffres des trois derniers rangs de N est divisible par 8.

GÉNÉRALISATION EN BASE b AVEC LES PUISSANCES DES DIVISEURS DE LA BASE

$\forall$ p $\in \mathbb{N}_0$, q étant un diviseur de la base b, un nombre N est divisible par q^p lorsque le nombre formé par les « *p*» derniers rangs de N est divisible par q^p.

$$\forall N \in Z ; N = \overline{a_n ... a_0}^{b}$$

$$q^p \mid N \Leftrightarrow q^p \mid \overline{a_{p-1} ... a_0}^{b}$$

En effet, $\quad q^p \mid \text{N} \Leftrightarrow N \equiv 0 \bmod q^p \quad$ (1)

Or, $\quad \text{N} = \sum_{i=0}^{n} (a_i . b^i)$

$$(1) \Leftrightarrow \quad q^p \mid \text{N} \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} (a_i . b^i) \equiv 0 \bmod q^p$$

Or,

$$\sum_{i=0}^{n} (a_i . b^i) \equiv \left[\sum_{i=0}^{n} ((a_{i.} . b^i) \bmod q^p) \right] \bmod q^p \equiv \left[\sum_{i=0}^{n} ((a_i \bmod q^p).(b^i \bmod q^p)) \right] \bmod q^p$$

Nous savons que $\quad \forall i \in N_0$ tel que $i \geq p : b^i \equiv 0 \bmod q^p$

car si $q \mid b$ alors $q^p \mid b^p$

$$\sum_{i=0}^{n}(a_i.b^i) \equiv \left[\sum_{i=0}^{p-1}((a_i.b^i) \bmod q^p) + \sum_{i=p}^{n}((a_i.b^i) \bmod q^p)\right] \bmod q^p \equiv \left[\sum_{i=0}^{p-1}((a_i.b^i) \bmod q^p)\right] \bmod q^p$$

Finalement,

$$\boxed{q^p \mid N \Leftrightarrow q^p \mid \overline{a_{p-1}...a_0}^{b}}$$

En base b, si q divise b, q^p divise un nombre N **si et seulement si** le nombre formé par les chiffres des p derniers rangs de N est divisible par q^p.

Illustrations…

En base décimale

725 est divisible par 25.

En base octale

$\overline{25140}^{8}$ est divisible par $\overline{4}^{8\,2} = \overline{20}^{8}$.

Avantages d'un système duodécimal.

Nous voyons donc avec cette démonstration sur les critères de divisibilité des diviseurs de la base et de ceux de leurs puissances, tout l'intérêt que nous aurions à avoir une base contenant un grand nombre de diviseurs. C'est pourquoi il existe quelques mathématiciens qui aimeraient voir le système duodécimal remplacer le système décimal. Deux associations en particulier en font la propagande, la *Dozenal Society of America* ainsi que la *Dozenal Society of Great-Britain*.

Ces mathématiciens arguent le fait que le système des fractions en serait simplifié ainsi que le calcul mental.

D'ailleurs, le système duodécimal est encore la référence lorsqu'il s'agit de parler du temps (12 mois, 24 heures, …) et certains pays n'ont abandonné ce système numéral en faveur du système décimal il n'y a pas si longtemps. Ainsi, la Grande Bretagne a utilisé les douzaines dans son système financier jusqu'en 1971.

Figure III.3 : *Chiffres du système duodécimal, selon l'écriture proposée par William Addison Dwiggins en 1932.*

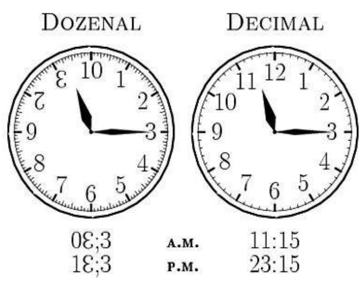


Figure III.4 : *Dans un système duodécimal, apprendre la lecture de l'heure serait plus facile ! Au lieu de dire 1h05 min, on pourrait simplement dire 1,1h.*

Un autre système ayant fait ses preuves est le système sexagésimal. En effet, la base soixante, avec ses nombreux diviseurs (1,2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 et 60), fut utilisée par les Babyloniens.

Par ailleurs, le système de mesure d'angles en minutes et secondes ainsi que celui des coordonnées géographiques sont des vestiges de la base sexagésimale.

La base décimale, même avec ses atouts immenses que sont les dix doigts, n'est donc, peut-être pas, le système de l'avenir.

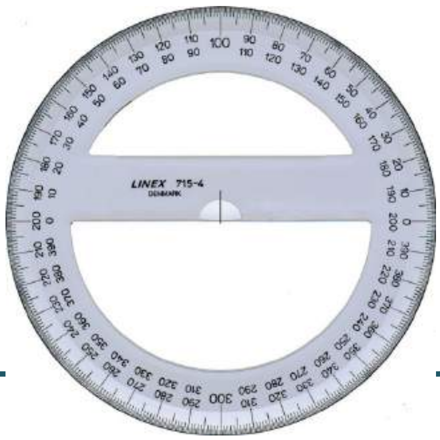


Figure III.5 : *L'angle au centre du cercle mesure 360°.*

Critères de divisibilité par k=b-1 en base b

CRITÈRE DE DIVISIBILITÉ PAR 9 EN BASE 10

Un nombre N est divisible par 9, en base 10, lorsque le nombre formé de la somme des chiffres de N est divisible par 9.

$$\forall N \in \mathbb{Z} : N = \overline{a_n ... a_0}^{10}$$

$$9 \mid N \Leftrightarrow 9 \mid \sum_{i=0}^{n} a_i$$

En effet, $9 \mid \mathrm{N} \Leftrightarrow N \equiv 0 \, mod \, 9$ (1)

Or, $\mathrm{N} = \sum_{i=0}^{n} (a_i . 10^i)$

(1) $\Leftrightarrow$ $9 \mid \mathrm{N} \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} (a_i . 10^i) \equiv 0 mod 9$

$$\sum_{i=0}^{n} (a_i . 10^i) \equiv \left[\sum_{i=0}^{n} ((a_{i.} . 10^i) mod 9) \right] mod 9 \equiv \left[\sum_{i=0}^{n} ((a_i \, mod 9).(10^i \, mod 9)) \right] mod 9$$

Nous savons que $\forall i \in N : 10^i \equiv 1 mod 9$

Car $10 mod 9 \equiv (9+1) mod 9 \equiv 1 mod 9$

Donc,

$$\sum_{i=0}^{n}(a_i.10^i)\equiv\left[\sum_{i=0}^{n}(a_i \bmod 9).(10^i \bmod 9)\right]\bmod 9\equiv\left[\sum_{i=0}^{n}(a_i \bmod 9).1\right]\bmod 9\equiv\left(\sum_{i=0}^{n}a_i\right)\bmod 9$$

Finalement, $\boxed{9\,\middle|\,N \Leftrightarrow 9\,\middle|\,\sum_{i=0}^{n}a_i}$

En base 10, 9 divise un nombre N **si et seulement si**
le nombre formé par la somme des chiffres de N est divisible par 9.

À partir de cette démonstration, on peut déduire le critère de divisibilité par 3.

Critère de divisibilité par 3 en base 10

Un nombre N est divisible par 3, en base 10, lorsque le nombre formé de la somme des chiffres de N est divisible par 3.

$$\forall N\in\mathbb{Z}: N=\overline{a_n...a_0}^{10}$$

$$3\,|\,N \Leftrightarrow 3\,\Big|\,\sum_{i=0}^{n}a_i$$

En effet, $3\,|\,\mathrm{N}\Leftrightarrow N\equiv 0 \, mod 3$ (1)

Or, $\mathrm{N} = \sum_{i=0}^{n}(a_i.10^i)$

(1) $\Leftrightarrow$ $3\,|\,\mathrm{N}\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n}(a_i.10^i)\equiv 0 \, mod 3$

$$\sum_{i=0}^{n}(a_i.10^i)\equiv\left[\sum_{i=0}^{n}((a_i.10^i)\bmod 3)\right]\bmod 3\equiv\left[\sum_{i=0}^{n}((a_i \bmod 3).(10^i \bmod 3))\right]\bmod 3$$

Nous savons que $\forall i\in N: 10^i\equiv 1 \, mod 3$ car $10 mod 3\equiv(9+1) mod 3\equiv 1 mod 3$.

Donc,

$$\sum_{i=0}^{n}(a_i.10^i)\equiv\left[\sum_{i=0}^{n}(a_i \bmod 3).(10^i \bmod 3)\right]\bmod 3\equiv\left[\sum_{i=0}^{n}(a_i \bmod 3).1\right]\bmod 3\equiv\left(\sum_{i=0}^{n}a_i\right)\bmod 3$$

Finalement, $\boxed{3\,\middle|\,N \Leftrightarrow 3\,\middle|\,\sum_{i=0}^{n}a_i}$

En base 10, 3 divise un nombre N **si et seulement si**
le nombre formé par la somme des chiffres de N est divisible par 3.

CRITÈRE DE DIVISIBILITÉ PAR k=b-1 EN BASE b

Un nombre N, en base b, est divisible par k=b-1 lorsque le nombre formé de la somme des chiffres de N est divisible par k.

$$\forall N \in \mathbb{Z} : N = \overline{a_n ... a_0}^{b}$$

$$k \mid N \Leftrightarrow k \mid \sum_{i=0}^{n} a_i$$

En effet, $\quad k \mid N \Leftrightarrow N \equiv 0 \, mod \, k \quad (1)$

Or, $\quad N = \sum_{i=0}^{n} (a_i . b^i)$

$$(1) \Leftrightarrow \quad k \mid N \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} (a_i . b^i) \equiv 0 \, mod \, k$$

Nous avons aussi que

$$\sum_{i=0}^{n} (a_i . 10^i) \equiv \left[\sum_{i=0}^{n} ((a_{i.} . b^i) mod \, k) \right] mod \, k \equiv \left[\sum_{i=0}^{n} ((a_i \, mod \, k).(b^i \, mod \, k)) \right] mod \, k$$

Nous savons que $\quad \forall i \in N : b^i \equiv 1 \, mod \, k$

Car $b mod k \equiv (k+1) mod k \equiv 1 mod k$

Donc,

$$\sum_{i=0}^{n} (a_i . b^i) \equiv \left[\sum_{i=0}^{n} (a_i \bmod k).(b^i \bmod k) \right] \bmod k \equiv \left[\sum_{i=0}^{n} (a_i \bmod k).1 \right] \bmod k \equiv \left(\sum_{i=0}^{n} a_i \right) \bmod k$$

Finalement, $\quad \boxed{k \mid N \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} a_i \equiv 0 \bmod k}$

En base b, k=b-1 divise un nombre N **si et seulement si**
le nombre formé par la somme des chiffres de N est divisible par k.

Illustrations…

En base décimale

19 332 est divisible par 9 car
(1+9+3+3+2)=18 est multiple de 9.

En base octale

$\overline{65154}^{8}$ est divisible par $\overline{7}^{8}$ car
$\overline{6+5+1+5+4}^{8} = \overline{21}^{10}$ est multiple de 7.

Critères de divisibilité par k=b+1 en base b

CRITÈRE DE DIVISIBILITÉ PAR 11 EN BASE 10

Un nombre N, en base 10, est divisible par 11 lorsque le nombre formé par la différence de la somme des chiffres de rang pair et de la somme des chiffres de rang impair est divisible par 11.

$$\forall N \in \mathbb{Z} : N = \overline{a_n \ldots a_0}^{10}$$

$$11 \mid N \Leftrightarrow 11 \left| \left(\sum_{i\in P} a_i - \sum_{i\in I} a_i \right) \right.$$

Où $I = \{ i \in \mathbb{N} \mid 0 \le i \le n \text{ et } i \text{ est impair} \}$

$P = \{ i \in \mathbb{N} \mid 0 \le i \le n \text{ et } i \text{ est pair} \}$

En effet, $11 \mid \mathrm{N} \Leftrightarrow N \equiv 0 \bmod 11$ (1)

Or, $\mathrm{N} = \sum_{i=0}^{n} (a_i .10^i)$

(1) $\Leftrightarrow$ $11 \mid \mathrm{N} \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} (a_i .10^i) \equiv 0 \bmod 11$

Nous savons que :

$$\sum_{i=0}^{n} (a_i .10^i) \equiv \left[\sum_{i=0}^{n} ((a_{i.} .10^i) \bmod 11) \right] \bmod 11 \equiv \left[\sum_{i=0}^{n} ((a_i \bmod 11).(10^i \bmod 11)) \right] \bmod 11$$

Soit $I = \{ i \in \mathbb{N} \mid 0 \le i \le n \text{ et } i \text{ est impair} \}$

$P = \{ i \in \mathbb{N} \mid 0 \le i \le n \text{ et } i \text{ est pair} \}$

$$\sum_{i=0}^{n} \left(a_i .10^i \right) = \left(\sum_{i\in P} a_i .10^i + \sum_{i\in I} a_i .10^i \right)$$

Nous savons que $\forall i \in \mathbb{N}_0 : 10^i \equiv (-1)^i \bmod 11$ car $10 \equiv -1 \bmod 11$

Donc, $\sum_{i=0}^{n} \left(a_i .10^i \right) \equiv \left[\left(\left(\sum_{i\in P} a_i \right) \bmod 11 - \left(\sum_{i\in I} a_i \right) \bmod 11 \right) \right] \bmod 11$

Finalement, $\boxed{11 \mid N \Leftrightarrow \left(\sum_{i\in P} a_i - \sum_{i\in I} a_i \right) \equiv 0 \, mod\, 11}$

En base 10, 11 divise un nombre N **si et seulement si** la différence de la somme des chiffres de rang pair et de celle des chiffres de rang impair est divisible par 11.

CRITÈRE DE DIVISIBILITÉ PAR k=b+1 EN BASE b

Un nombre N, en base b, est divisible par k=b+1 lorsque le nombre formé par la différence de la somme des chiffres de rang pair et de la somme des chiffres de rang impair est divisible par k.

$$\forall N \in \mathbb{Z} : N = \overline{a_n \dots a_0}^{b}$$

$$k \,|\, N \Leftrightarrow k \,\left|\, \left(\sum_{i \in P} a_i - \sum_{i \in I} a_i \right)\right.$$

Où $I = \{ i \in \mathbb{N} \,|\, 0 \le i \le n \text{ et } i \text{ est impair} \}$

$P = \{ i \in \mathbb{N} \,|\, 0 \le i \le n \text{ et } i \text{ est pair} \}$

En effet, $\quad k \,|\, N \Leftrightarrow N \equiv 0 \bmod k \qquad (1)$

Or, $\quad N = \sum_{i=0}^{n} (a_i . b^i)$

$(1) \Leftrightarrow \quad k \,|\, N \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} (a_i . b^i) \equiv 0 \bmod k$

De plus

$$\sum_{i=0}^{n} (a_i . b^i) \equiv \left[\sum_{i=0}^{n} ((a_i . b^i) \bmod k) \right] \bmod k \equiv \left[\sum_{i=0}^{n} ((a_i \bmod k).(b^i \bmod k)) \right] \bmod k$$

Soit $\quad I = \{ i \in \mathbb{N} \,|\, 0 \le i \le n \text{ et } i \text{ est impair} \}$

$P = \{ i \in \mathbb{N} \,|\, 0 \le i \le n \text{ et } i \text{ est pair} \}$

$$\sum_{i=0}^{n} (a_i . b^i) = \left(\sum_{i \in P} a_i . b^i + \sum_{i \in I} a_i . b^i \right)$$

Nous savons que $\quad \forall i \in N_0 : b^i \equiv (-1)^i \bmod k \;$ car $b \equiv -1 \bmod k$

Donc, $\quad \sum_{i=0}^{n} (a_i . b^i) \equiv \left[\left(\sum_{i \in P} a_i \right) \bmod k - \left(\sum_{i \in I} a_i \right) \bmod k \right] \bmod k$

Finalement, $\boxed{k \mid N \Leftrightarrow \left(\sum_{i\in P} a_i - \sum_{i\in I} a_i\right) \equiv 0 \bmod k}$

En base b, k= b+1, divise un nombre N **si et seulement si** la différence de la somme des chiffres de rang pair et de celle des chiffres de rang impair est divisible par k.

Illustration…

Etudions ce critère de divisibilité à la façon « Simpson », c'est-à-dire en base 8. Le diviseur de la base 8 à considérer est $\overline{11}^8$ (dans notre base décimale, ce nombre correspond à 9). Nous avons donc le critère suivant :

Un nombre entier N est divisible par $\overline{11}^8$ **si et seulement si** la différence de la somme des chiffres de rang pair et celle des chiffres de rang impair est divisible par $\overline{11}^8$.

Soit N = $\overline{a_n a_{n-1} ... a_1 a_0}^8$, alors $\left(\overline{11}^8 \middle| N \Leftrightarrow \overline{11}^8 \middle| \left(\sum_{i\in P} \overline{a_i}^8 - \sum_{i\in I} \overline{a_i}^8\right)\right)$.

Par exemple, $\overline{5220535411606321}^8$ est divisible par $\overline{11}^8$ car…

$$\sum_{i\in P} \overline{a_i}^8 = \overline{5+2+5+5+1+6+6+2}^8 = \overline{40}^8$$

$$\sum_{i\in I} \overline{a_i}^8 = \overline{2+0+3+4+1+0+3+1}^8 = \overline{16}^8$$

Et $\overline{40}^8 - \overline{16}^8 = \overline{22}^8$. Or, $\overline{11}^8 \mid \overline{22}^8$

Critères de divisibilité par un k quelconque

CRITÈRE DE DIVISIBILITÉ PAR 7 EN BASE 10

Un nombre N, en base 10, est divisible par 7 si la différence du nombre formé par tous ses chiffres excepté celui des unités et le double du chiffre des unités est divisible par 7.

$$\forall N \in \mathbb{Z} : N = \overline{a_n ... a_0}^{10}$$

$$7 | N \Leftrightarrow 7 | \left(\overline{a_n ... a_1}^{10} - 2a_0\right)$$

En effet, $7 | N \Leftrightarrow N \equiv 0 mod 7$

Or, $N = \sum_{i=0}^{n} \left(a_i . 10^i\right)$

Comme 21 est multiple de 7, $7 | N \Leftrightarrow 7 | \left(N - 21 a_0\right)$

Nous avons $N - 21.a_0 = \sum_{i=2}^{n} a_i . 10^i + \left(a_1 - 2a_0\right).10$

Ou encore $N - 21.a_0 = 10.\left(\overline{a_n ... a_1}^{10} - 2a_0\right)$

Comme 7 et 10 sont premiers entre eux, $7 | \left(N - 21.a_0\right) \Leftrightarrow 7 | \left(\overline{a_n ... a_1}^{10} - 2a_0\right)$

Finalement, $\boxed{7 | N \Leftrightarrow 7 | \left(\overline{a_n ... a_1}^{10} - 2a_0\right)}$

En base 10, 7 divise un nombre N **si et seulement si** la différence du nombre formé par tous ses chiffres excepté celui des unités et le double du chiffre des unités est divisible par 7.

Critère de divisibilité par k premier avec b en base b

Soit k, nombre premier avec b, la base de numération.

Soit r, un multiple de k inférieur à b^2 dont le chiffre de rang nul est égal à 1.

Un nombre N, en base b, est divisible par k si la différence du nombre N à qui on a enlevé le rang nul et du produit du chiffre de rang 1 de r par le chiffre de rang nul de N est divisible par k.

Ayant trouvé un multiple de k, que l'on nommera r, tel que $r = \overline{m1}^{b}$.

Alors,

$$\forall N \in \mathbb{Z} : N = \overline{a_n ... a_0}^{b}$$

$$k \mid N \Leftrightarrow k \mid \left(\overline{a_n ... a_1}^{b} - m a_0 \right)$$

En effet, $k \mid N \Leftrightarrow N \equiv 0 \bmod k$

Or, $N = \sum_{i=0}^{n} (a_i . b^i)$

Comme r est multiple de k, $k \mid N \Leftrightarrow k \mid (N - r.a_0)$

Nous avons $N - r.a_0 = \sum_{i=2}^{n} a_i . b^i + (a_1 - m a_0).b$

Ou encore $N - r.a_0 = b.\left(\overline{a_n ... a_1}^{b} - m a_0 \right)$

Comme *b* et *k* sont premiers entre eux, $k \mid (N - r.a_0) \Leftrightarrow k \mid \left(\overline{a_n ... a_1}^{b} - m a_0 \right)$

Finalement,

$$\boxed{k \mid N \Leftrightarrow k \mid \left(\overline{a_n ... a_1}^{b} - m a_0 \right)}$$

Illustrations…

En base décimale

1638 est divisible par 7 car (163-2.8)=147, divisible par 7 car (14-2.7)=0 est multiple de 7.

En base octale

Remarquant que $\overline{11}^{8}$ est multiple de $\overline{3}^{8}$, on peut affirmer que $\overline{652}^{8}$ est divisible par $\overline{3}^{8}$ car $\left(\overline{65}^{8}-\overline{2}^{8}\right)=\overline{63}^{8}$ est multiple de $\overline{3}^{8}$.

Généralisation des critères

TABLEAU DES CRITÈRES DE DIVISIBILITÉ EN BASE 10

Considérons $N=\sum_{i=0}^{n}\left(a_i.10^i\right)=\overline{a_n a_{n-1}...a_1 a_0}^{10}$

Et $I=\{i\in\mathbb{N}\,|\,0\le i\le n \text{ et } i \text{ est impair}\}$

$P=\{i\in\mathbb{N}\,|\,0\le i\le n \text{ et } i \text{ est pair}\}$

Diviseur	Critère	Traduction en Français
2	$2\,|\,N\Leftrightarrow 2\,|\,\overline{a_0}^{10}$	*Un nombre N est divisible par 2 si et seulement si le chiffre des unités est divisible par 2.*
3	$3\,|\,N\Leftrightarrow 3\,|\sum_{i=0}^{n}\overline{a_i}^{10}$	*Un nombre N est divisible par 3 si et seulement si la somme des chiffres le composant est divisible par 3.*
4	$4\,|\,N\Leftrightarrow 4\,|\,\overline{a_1 a_0}^{10}$	*Un nombre N est divisible par 4 si et seulement si le nombre formé du chiffre des unités et du chiffre des dizaines est divisible par 4.*
5	$5\,|\,N\Leftrightarrow 5\,|\,\overline{a_0}^{10}$	*Un nombre N est divisible par 5 si et seulement si le chiffre des unités est divisible par 5.*
6	$6\,|\,N\Leftrightarrow\left(2\,|\,\overline{a_0}^{10}\right)\wedge\left(3\,|\sum_{i=0}^{n}\overline{a_i}^{10}\right)$	*Un nombre N est divisible par 6 si et seulement s'il est divisible par 2 et par 3.*
7	$7\,|\,N\Leftrightarrow 7\,|\left(\overline{a_n a_{n-1}...a_1}^{10}-2.\overline{a_0}^{10}\right)$	*Un nombre N est divisible par 7 si et seulement si la différence du nombre formé par tous ses chiffres excepté celui des unités et le double du chiffre des unités est divisible par 7.*
8	$8\,|\,N\Leftrightarrow 8\,|\,\overline{a_2 a_1 a_0}^{10}$	*Un nombre N est divisible par 8 si et seulement si le nombre formé par ses trois derniers chiffres est divisible par 8.*
9	$9\,|\,N\Leftrightarrow 9\,|\sum_{i=0}^{n}\overline{a_i}^{10}$	*Un nombre N est divisible par 9 si et seulement si la somme des chiffres le composant est divisible par 9.*
10	$10\,|\,N\Leftrightarrow a_0=0$	*Un nombre N est divisible par 10 si et seulement s'il se termine par 0.*

11	$11 \mid N \Leftrightarrow 11 \left\| \left(\sum_{i \in P} \overline{a_i}^{10} - \sum_{i \in I} \overline{a_i}^{10} \right) \right.$	*Un nombre N est divisible par 11 si et seulement si la différence de la somme des chiffres de rang pair et celle des chiffres de rang impair est divisible par 11.*

Méthode pour retrouver le critère de divisibilité d'un nombre k en base b

- Commencer par calculer $b \bmod k$

Si $b \bmod k = 0$	alors utiliser le critère de « 5 » en base 10.
Si $b \bmod k = 1$	alors utiliser le critère de « 9 » en base 10.
Si $b \bmod k = -1$	alors utiliser le critère de « 11 » en base 10.

- Regarder si $k = q^p$ où q est un diviseur de b ($q|b$) et alors utiliser le critère de « 4 » ou de « 8 » en base 10.
- Si ces critères ne fonctionnent pas, décomposer k en facteurs premiers et se ramener à un critère semblable à celui de 6.
- Ou encore trouver un multiple r de k finissant par 1 pour réduire le nombre à diviser d'un rang de la façon suivante :

$$k|N\left(\overline{a_n \ldots a_1 a_0}^b\right) \Leftrightarrow k\left|\left(\overline{a_n \ldots a_1}^b - m.a_0\right)\right.$$

Illustrations en base octale…

Diviseur	Critère	Exemple
$\overline{2}^8$	$\overline{2}^8 \mid N \Leftrightarrow \overline{2}^8 \mid \overline{a_0}^8$	$\overline{2}^8 \mid \overline{476}^8$
$\overline{3}^8$	$\overline{3}^8 \mid N \Leftrightarrow \overline{3}^8 \mid \left(\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1}^b - \overline{a_0}^b\right)$	$\overline{3}^8 \mid \overline{476}^8$ car $\overline{3}^8 \mid \overline{41}^8$, car $\overline{3}^8 \mid \overline{3}^8$
$\overline{4}^8$	$\overline{4}^8 \mid N \Leftrightarrow \overline{4}^8 \mid \overline{a_0}^8$	$\overline{4}^8 \mid \overline{7350}^8$
$\overline{5}^8$	$\overline{5}^8 \mid N \Leftrightarrow \overline{5}^8 \mid \left(\overline{a_n \ldots a_1}^b - \overline{3}^8 . \overline{a_0}^b\right)$	$\overline{5}^8 \mid \overline{1313}^8$ car $\overline{5}^8 \mid \overline{120}^8$, car $\overline{5}^8 \mid \overline{12}^8$ $(=\overline{10}^{10})$
$\overline{6}^8$	$\overline{6}^8 \mid N \Leftrightarrow \left(\overline{2}^8 \mid N\right) \wedge \left(\overline{3}^8 \mid N\right)$	$\overline{6}^8 \mid \overline{476}^8$
$\overline{7}^8$	$\overline{7}^8 \mid N \Leftrightarrow \overline{7}^8 \mid \sum_{i=0}^{n} \overline{a_i}^8$	$\overline{7}^8 \mid \overline{313}^8$ car $\overline{7}^8 \mid \left(\overline{3}^8 + \overline{1}^8 + \overline{3}^8\right)$
$\overline{10}^8$	$\overline{10}^8 \mid N \Leftrightarrow \overline{a_0}^8 = 0$	$\overline{10}^8 \mid \overline{270}^8$
$\overline{11}^8$	$\overline{11}^8 \mid N \Leftrightarrow \overline{11}^8 \left\| \left(\sum_{i \in P} \overline{a_i}^8 - \sum_{i \in I} \overline{a_i}^8\right)\right.$	$\overline{11}^8 \mid \overline{6303}^8$ car $\overline{11}^8 \mid \left(\overline{6}^8 - \overline{6}^8\right)$

Observation intéressante

Les critères de divisibilité que nous vous avons présentés dans les pages précédentes ne sont pas les seuls existants. Il existe plus d'une façon de reconnaître dans la syntaxe du nombre les caractères de divisibilité de celui-ci.

Ainsi, en manipulant les critères de divisibilité et en jouant avec les congruences, nous avons découvert un fait intéressant.

Lorsqu'on calcule le résidu modulo 4 d'un naturel N, tel que

$N=\sum_{i=0}^{n}(a_i 10^i)$, on obtient ceci :

$$\sum_{i=0}^{n}(a_i.10^i)\equiv\left[\left(a_0 \bmod 4+(a_1 10^1)\bmod 4\right)\right]\bmod 4\equiv\left(a_0+2a_1\right)\bmod 4$$

Ce résultat nous permet d'énoncer un nouveau critère de divisibilité par 4 en base 10 qui serait :

> En base 10, 4 divise un nombre N **si et seulement si**
> la somme du chiffre des unités et du double du chiffre des dizaines est divisible par 4.

Un résultat semblable peut être obtenu pour le critère de divisibilité par 8 en base 10.

$$\sum_{i=0}^{n}(a_i.10^i)\equiv\left[\left(a_0 \bmod 8+(a_1 10^1)\bmod 8+(a_2 10^2)\bmod 8\right)\right]\bmod 8\equiv\left(a_0+2a_1+4a_2\right)\bmod 8$$

> En base 10, 8 divise un nombre N **si et seulement si**
> la somme du chiffre des unités, du double du chiffre des dizaines et du quadruple des chiffres des centaines est divisible par 8.

Grâce à ces résultats, il nous est possible de conjecturer un critère de divisibilité pour la k^ème^ puissance de 2 qui sera :

$$\text{N est divisible par } 2^{\text{k}}$$

$$\Updownarrow$$

$$N \bmod 2^k=0 \Leftrightarrow\left[\sum_{i=0}^{k}(a_i 2^i)\bmod 2^k\right]\bmod 2^k=0$$

En réalité, nous n'avons rien inventé. Un certain Monsieur Pascal y avait déjà pensé au XVII^ème^ siècle et avait conçu un ruban pour appliquer ce nouveau critère de divisibilité.

Rubans de Pascal


Figure III. 6 : *Blaise Pascal (1623-1662)*

Le Français Blaise Pascal eut plusieurs casquettes dans sa vie, notamment celles d'inventeur, de physicien et de philosophe. Bien sûr, le Pascal auquel nous nous intéressons dans notre travail est mathématicien, et c'est lui qui a donné son nom aux fameux rubans.

En effet, tout comme nous, il s'est intéressé aux critères de divisibilité, et a mis en place une méthode à suivre pour déterminer si un nombre est divisible par un autre.

Moins de blablas, plus d'explications.

RUBAN

Dans un système de numération en base b, on appelle ruban d'un nombre k $\underset{not}{=}$ R_k la suite des résidus modulo k des puissances de la base b.

Si $b^i \bmod k = r_i$, le ruban est composé de la suite des r_i.

On exclut le cas k=1.

Illustration…

En base décimale:

$10^0 \bmod 7 = 1, 10^1 \bmod 7 = 3, 10^2 \bmod 7 = 2, 10^3 \bmod 7 = 6, 10^4 \bmod 7 = 4, 10^5 \bmod 7 = 5,$

$10^6 \bmod 7 = 1, 10^7 \bmod 7 = 3, 10^8 \bmod 7 = 2, 10^9 \bmod 7 = 6, 10^{10} \bmod 7 = 4, 10^{11} \bmod 7 = 5, \ldots$

PROPRIÉTÉS

Le ruban commence toujours par un 1.

En effet, ayant exclu 1 des diviseurs, le reste de la division de 1 par un nombre supérieur à 1 vaut 1.

$$\forall b \in \mathbb{N}_{0,1} : b^0 \bmod k = 1$$

Cette suite est toujours finie.

En effet, un nombre k ne possède que k résidus distincts (0, 1, 2, … k-1).

Si 0 apparait dans le ruban, tous les éléments suivants sont nuls. On dit alors que le ruban est fini, bien qu'en fait il soit terminé par une infinité de 0.

En effet, considérons $n \in \mathbb{N} : b^n \bmod k = 0$.
Alors, $\forall l \in \mathbb{N} : b^{n+l} \bmod k = 0$
car $b^{n+l} \bmod k = \left(\left(b^n \bmod k\right).\left(b^l \bmod k\right)\right) \bmod k = 0$

La suite $(r_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est périodique.

En effet, le nombre de résidus possibles étant limité, un résidu au moins doit se répéter.
Considérons $n \in \mathbb{N} : b^{n+q} \bmod k = b^q \bmod k = r_q$. *Alors,*
$\forall l \in \mathbb{N} : b^{n+q+l} \bmod k = \left(\left(b^{n+q} \bmod k\right).\left(b^l \bmod k\right)\right) \bmod k$
ou encore
$b^{n+q+l} \bmod k = \left(\left(b^q \bmod k\right).\left(b^l \bmod k\right)\right) \bmod k = b^{q+l} \bmod k$

NOTATION

Un ruban fini est noté $\left[r_0 r_1 r_2 \ldots \overline{0}\right]$.

Un ruban périodique est noté $\left[r_0 r_1 \ldots r_p \overline{r_{p+1} \ldots r_m}\right]$.

FILTRE

Soit $N \in \mathbb{Z}$ tel que $\mathrm{N} = \sum_{i=0}^{n} (a_i . b^i)$.

Grâce à la compatibilité des congruences avec la multiplication et l'addition :

$$\mathrm{N} \equiv \left[\sum_{i=0}^{n} (a_i . (b^i \bmod k))\right] \bmod k$$

Or, $$\sum_{i=0}^{n} (b^i \bmod k) = \sum_{i=0}^{n} r_i$$

Donc, $$\mathrm{N} \equiv \left[\sum_{i=0}^{n} a_i . r_i\right] \bmod k$$

Ce nombre $\sum_{i=0}^{n} (a_i . r_i)$ est appelé filtre de N par k et est noté $f_k(\mathrm{N})$.

La technique que Pascal nous propose est donc la suivante :

Pour déterminer si un entier N est divisible par un entier k, il faut calculer son filtre par k.

Si ce dernier est divisible par k, alors N est divisible par k. On peut bien sûr répéter l'opération indéfiniment jusqu'à avoir (ou pas) un multiple facile de k.

$$\boxed{N \equiv f_k(N) \bmod k \equiv f_k(f_k(N)) \bmod k}$$

Prenons un exemple concret :

Comment savoir si en base 8, le nombre N= $\overline{754502703}^{8}$ est divisible par $\overline{3}^{8}$?

1. D'abord calculons le ruban de 3 dans la base 8.

$$\overline{8^0 \bmod 3}^{8} = \overline{1}^{8},\ \overline{8^1 \bmod 3}^{8} = \overline{2}^{8},\ \overline{8^3 \bmod 3}^{8} = \overline{1}^{8},$$
$$\overline{8^4 \bmod 3}^{8} = \overline{2}^{8},\ \overline{8^5 \bmod 3}^{8} = \overline{1}^{8}$$

$$R_f = \left[1,2,\overline{1,2}\right]$$

2. Calculons ensuite le filtre de N.

$$f_{\overline{3}^{8}}\left(\overline{754502703}^{8}\right) = \sum_{i=0}^{n}(a_i.r_i)$$

Pour ce faire, il suffit de multiplier chaque chiffre du nombre par le résidu modulo 3 qui correspond à son rang.

Il se trouve qu'ici, on peut arriver à une généralisation.

Soit $I = \{i \in \mathbb{N} \mid 0 \leq i \leq n \text{ et } i \text{ est impair}\}$

et $P = \{i \in \mathbb{N} \mid 0 \leq i \leq n \text{ et } i \text{ est pair}\}$

$$f_{\overline{3}^{8}}\left(\overline{754502703}^{8}\right) = \sum_{i \in P} a_i + 2.\sum_{i \in I} a_i = \overline{(3+7+4+7)+2.(2+5+5)}^{8} = \overline{55}^{8}$$

3. Maintenant, vérifions si le filtre est divisible par $\overline{3}^{8}$.

$$\overline{754502703}^{8} \equiv \overline{55}^{8} \bmod \overline{3}^{8}$$

Bien sûr, $\overline{55}^8$ est peut-être plus court, mais rien n'indique qu'il est divisible par $\overline{3}^8$. Recommençons donc l'opération et calculons le filtre du filtre, jusqu'à obtenir une valeur facile.

$$f_{\overline{3}^8}\left(f_{\overline{3}^8}\left(\overline{754502703}^8\right)\right)=f_{\overline{3}^8}\left(\overline{55}^8\right)=\overline{5+2.5}^8=\overline{17}^8,$$

$$f_{\overline{3}^8}\left(f_{\overline{3}^8}\left(f_{\overline{3}^8}\left(\overline{754502703}^8\right)\right)\right)=f_{\overline{3}^8}\left(\overline{17}^8\right)=\overline{7+2}^8=\overline{11}^8,$$

$$f_{\overline{3}^8}\left(f_{\overline{3}^8}\left(f_{\overline{3}^8}\left(f_{\overline{3}^8}\left(\overline{754502703}^8\right)\right)\right)\right)=f_{\overline{3}^8}\left(\overline{11}^8\right)=\overline{1+2}^8=\overline{3}^8$$

$$\overline{754502703}^8\equiv\overline{3}^8 \bmod \overline{3}^8\equiv\overline{0}^8 \bmod \overline{3}^8$$

Notre nombre est donc bien divisible par $\overline{3}^8$.

Automates

Les critères de divisibilité reposent sur la représentation des nombres. On peut donc comparer un système de numération à un langage, possédant sa propre grammaire (la base choisie et son emploi dans le système de numération positionnelle) et son alphabet (l'ensemble des chiffres). Dans ce langage, chaque nombre est donc représenté par un mot.

Il est possible de construire un algorithme permettant de reconnaître le critère de divisibilité de chaque nombre en lisant le mot le représentant lettre par lettre, ou plutôt dans notre cas, chiffre par chiffre.

L'algorithme construit porte le nom d'automate fini. Un automate « lit » un mot écrit sur son ruban d'entrée. Il part d'un état initial et à chaque lettre lue, il change d'état. Si, à la fin du mot, il est dans un état final, on dit qu'il reconnaît le mot lu. Un automate fini est la donnée de plusieurs informations telles l'alphabet A dans lequel on code, un ensemble fini d'états, dans lesquels on distingue l'état initial et les états finaux.

Un mot est reconnu ou accepté par un automate fini s'il existe un chemin suivi par le mot menant de l'état initial à un état final.

Un automate se présente donc sous la forme d'un graphe orienté, c'est-à-dire un ensemble de sommets-états et de flèches permettant de passer d'un état à l'autre.

Illustration …

Pour illustrer la procédure, tâchons de reconnaître un nombre pair codé en base 3.

Voici l'automate reconnaissant les nombres pairs en base 3.

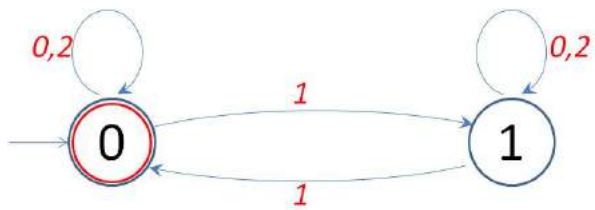


Figure 7 : *Automate reconnaissant les nombres pairs en base 3.*

L'alphabet est donc $A = \{0,1,2\}$. Les états à considérer, 0 et 1, correspondent aux seuls résidus modulo 2 possibles. L'état initial et l'état final coïncident tous deux avec 0.

Considérons un naturel $N=\sum_{i=0}^{n} a_i 3^i = \overline{a_n ... a_1 a_0}^3$ où $a_i \in \{0,1,2\}$.

Un automate lit un nombre, un mot de gauche à droite, en commençant sa lecture par le chiffre de poids fort, soit ici a_n.

Si $a_n=0$ ou $a_n=2$, $a_n \bmod 2=0$, et l'automate maintient la position dans l'état 0. Par contre, si $a_n=1$, l'automate bascule la position vers l'état 1.

L'automate poursuit sa lecture en saisissant a_{n-1}.

Nous considérons à présent un nombre sous la forme $\overline{a_n a_{n-1}}^3$ dont nous devons étudier le reste dans la division par 2.

$$\left(\overline{a_n a_{n-1}}^3\right) \bmod 2 = \left[(a_n.3) \bmod 2 + a_{n-1} \bmod 2\right] \bmod 2$$

Donc, si nous étions sur l'état 0, la situation est identique à ce qui s'est produit pour a_n : une valeur de a_{n-1} égale à 0 ou 2 conserve l'état 0, une valeur 1 envoie sur l'état 1.

Par contre, si nous étions en 1 ($a_n mod 2=1$), la position reste sur 1 si a_{n-1} prend une valeur paire et bascule sur 0 si a_{n-1} vaut 1.

Et on recommence en analysant le chiffre se trouvant à la droite, jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de chiffre à lire. On observe la position de fin de lecture. Si elle coïncide avec l'état 0, le nombre lu est pair.

Tout comme le ruban de Pascal, cette méthode s'adapte à toute base b naturelle et tout diviseur d.

L'automate est toujours représenté par un graphe orienté possédant d sommets correspondant aux valeurs des d résidus possibles modulo d, de chaque sommet partent b arcs, un par chiffre possible de la base.

La lecture d'un nouveau chiffre a_i fait passer de l'état e à l'état $e'=(e.b+a_i) mod d$.

Illustration …

Voici un automate plus complexe reconnaissant les diviseurs de 5 en base 8.

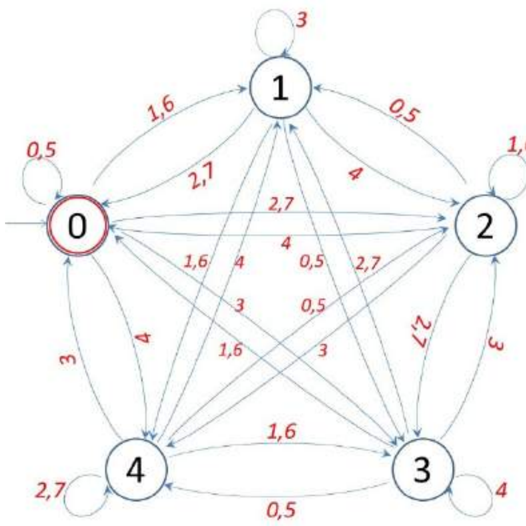


Figure 8 *: Automate reconnaissant les diviseurs de 5 en base 8.*

Les automates sont implémentés dans de nombreuses machines, en particulier dans les logiciels de traitement de texte où ils remplissent la fonction de recherche de mot dans un texte.

La preuve par 9 est une méthode de calcul simple qui permet de vérifier si un calcul est certainement faux ou bien de dire qu'il sera probablement juste. Elle n'est en effet pas infaillible. On l'utilise principalement dans le cadre de multiplications ou de divisions bien que l'on puisse l'appliquer à toutes les opérations.

Explications en base 10

Pour faire la preuve par 9 du produit « $a \times b = c$ », il suffit de comparer le produit du résidu modulo 9 du multiplicande *a* par le résidu modulo 9 du multiplicateur *b* au résidu modulo 9 du produit *c*. Si les deux termes sont congrus entre eux, alors la preuve par 9 est réussie.

$$\text{La preuve par 9 réussit} \Leftrightarrow (a \bmod 9 \times b \bmod 9) \equiv c \bmod 9$$

Remarque : Pour obtenir le résidu modulo 9 d'un nombre « N », il suffit d'effectuer la somme des chiffres qui le composent, et de recommencer l'opération jusqu'à l'obtention d'un nombre inférieur à 9. En effet, nous avons vu précédemment que, si $N = \overline{a_n ... a_1 a_0}^{10}$, alors $N \equiv \left(\sum_{i=0}^{n} a_i \right) \bmod 9$.

Illustration… Soit à vérifier : **24x17=408**.

$$(24 \bmod 9 \times 17 \bmod 9) \stackrel{?}{\equiv} 408 \bmod 9$$

$$(6 \bmod 9 \times 8 \bmod 9) \stackrel{?}{\equiv} 12 \bmod 9$$

$$48 \bmod 9 \stackrel{?}{\equiv} 3 \bmod 9$$

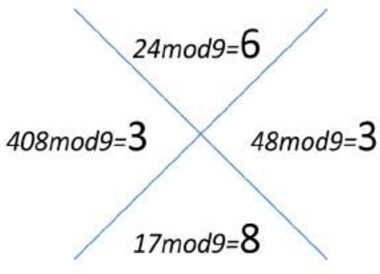
$$12 \bmod 9 \stackrel{?}{\equiv} 3 \bmod 9$$

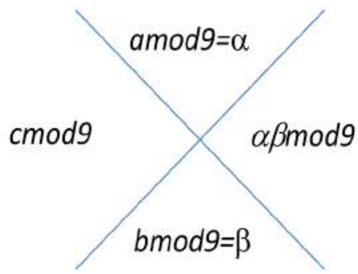
$$3 \bmod 9 \equiv 3 \bmod 9$$

La preuve a réussi. Il est **possible** que le résultat soit juste !

Autrefois enseignée à l'école primaire, la preuve par 9 prenait cette forme de croix.

1. Dans le haut de la croix, on place le résidu modulo 9 du multiplicande a, dans notre exemple 6. Appelons cette valeur α.
2. Dans le bas de la croix, on place le résidu modulo 9 du multiplicateur b, dans notre exemple 8. Appelons cette valeur β.
3. Dans la zone gauche, on place le résidu modulo 9 du produit c, dans notre exemple 3.
4. Dans la zone droite, on place le résidu modulo 9 du produit αβ, dans notre exemple 3 également.





Le principe est le même pour l'addition $(a+b=c)$ et la soustraction $(a-b=c)$ à par le fait que, à la place du produit des résidus modulo 9 des deux premiers termes, il faille en faire la somme (ou la différence pour la soustraction) avant de les comparer au résidu modulo 9 du résultat c.

Illustrations… Soit à vérifier …

45+73=181	57-22=35
Nous commettons intentionnellement une erreur de calcul! $(45\bmod 9+73\bmod 9)\overset{?}{\equiv}181\bmod 9$ $(0\bmod 9+1\bmod 9)\overset{?}{\equiv}1\bmod 9$ $1\bmod 9\equiv 1\bmod 9$ Ceci prouve que la preuve n'est pas infaillible !	$(57\bmod 9-22\bmod 9)\overset{?}{\equiv}35\bmod 9$ $(3\bmod 9-4\bmod 9)\overset{?}{\equiv}8\bmod 9$ $-1\bmod 9\overset{?}{\equiv}8\bmod 9$ $8\bmod 9\overset{?}{\equiv}8\bmod 9$ Notre calcul est probablement juste.

Pour la division, il suffit de penser au modèle « $quotient \times diviseur + reste = dividende$ » ou « *qxd + r = D* » et de comparer la somme du produit du résidu modulo 9 du quotient *q* par le résidu modulo 9 du diviseur *d* et du résidu modulo 9 du reste *r* au résidu modulo 9 du dividende *D*.

Illustration… Soit à vérifier … **309=18x17 + 3**

$$309 \bmod 9 \overset{?}{\equiv} (18 \bmod 9 \times 17 \bmod 9 + 3 \bmod 9) \bmod 9$$

$$3 \bmod 9 \overset{?}{\equiv} (0 \bmod 9 \times 8 \bmod 9 + 3 \bmod 9) \bmod 9$$

$$3 \bmod 9 \equiv 3 \bmod 9$$

JUSTIFICATION DE CETTE PREUVE EN BASE 10

La preuve par 9 fonctionne grâce à la compatibilité de la congruence avec l'addition et la multiplication que nous expliquons dans l'annexe II.

$$\forall n \in N_0, \forall a,b,c,d \in \mathbb{Z}, \text{ si } a \equiv c \bmod n \text{ et } b \equiv d \bmod n,$$
$$alors\ \ (a+b) \equiv (c+d) \bmod n \text{ et } ab \equiv (cd) \bmod n$$

Cette preuve peut donc fonctionner avec n'importe quel naturel non nul.

Illustration… Utilisons une preuve par 4 pour vérifier l'opération

17x9 =153

$$(17 \bmod 4 \times 9 \bmod 4) \overset{?}{\equiv} 153 \bmod 4$$

$$(1 \bmod 4 \times 1 \bmod 4) \overset{?}{\equiv} 1 \bmod 4$$

La preuve par 4 a réussi : cette méthode nous informe aussi que le résultat est **probablement** correct.

INCONVÉNIENT

Bien qu'on puisse affirmer que l'opération soit toujours fausse quand la preuve par 9 échoue, quand la preuve par 9 réussit, cela ne signifie pas pour autant que l'opération est juste. Cela montre simplement qu'il y a de grandes chances qu'elle soit correcte.

Il est donc possible que $a \equiv b \bmod 9$, bien que $a \neq b$.

La preuve par 9 constitue donc une condition nécessaire mais pas suffisante.

Illustration… Voici une opération erronée **24x17=417**

$$(24 \bmod 9 \times 17 \bmod 9) \stackrel{?}{\equiv} 417 \bmod 9$$

$$(6 \bmod 9 \times 8 \bmod 9) \stackrel{?}{\equiv} 3 \bmod 9$$

$$48 \bmod 9 \stackrel{?}{\equiv} 3 \bmod 9$$

$$3 \bmod 9 \equiv 3 \bmod 9$$

La preuve par 9 a réussi et pourtant 24x17=408≠417.

LA PREUVE PAR N EN BASE 10

Puisqu'on aurait pu employer tout autre naturel non nul pour cette preuve, il est normal de se demander pourquoi avoir privilégié le nombre 9.

Il y a deux raisons à cela :

1. Chercher un résidu modulo 9 est très simple car il suffit d'additionner tous les chiffres composant ce nombre jusqu'à ce qu'on arrive à un résultat inférieur à 9. Alors que calculer le résidu modulo 4 d'un nombre est déjà beaucoup plus fastidieux. Alors ne pensons même pas aux nombres tels que 13, 17 et 19 ! La plupart des nombres supérieurs à 10 sont éliminés pour cette raison. La preuve par 11 est cependant parfois employée vu la relative facilité d'obtention du résidu modulo 11 d'un nombre (cf. page 106).

2. Il existe 9 résidus modulo 9 différents (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8) :

$$(9n) \bmod 9 = 0$$
$$(9n+1) \bmod 9 = 1$$
$$(9n+2) \bmod 9 = 2$$
$$...$$
$$(9n+8) \bmod 9 = 8$$
$$(9n+9) \bmod 9 \equiv 9(n+1) \bmod 9 = o$$
$$etc$$

Alors qu'il n'existe que 4 résidus modulo 4 différents (0, 1, 2 et 3) :

$$(4n) \bmod 4 = 0$$
$$(4n+1) \bmod 4 = 1$$
$$(4n+2) \bmod 4 = 2$$
$$(4n+3) \bmod 4 = 3$$
$$(4n+4) \bmod 4 \equiv 4(n+1) \bmod 4 = o$$
$$etc$$

La probabilité que deux termes différents soit congrus entre eux alors qu'ils sont différents augmente donc plus le nombre par lequel on fait la preuve est petit. Une preuve réussie ne donne donc pas dans ce cas une grande probabilité d'opération réussie.

La combinaison de ces deux arguments désigne donc la preuve par 9 comme étant la plus efficace. (9 est préféré à 11 car, même si la preuve par 11 offre plus de possibilités de résidus, l'opération $a \bmod 11$ s'avère plus ardue que l'opération $a \bmod 9$).

Généralisation en base b

Cette preuve reposant sur les propriétés des résidus et congruences est facilement généralisable dans un système de numération positionnelle en base b.

Soit n, un nombre naturel non nul codé dans la base b.

Considérant l'opération ⊗ comme représentant l'addition, la soustraction ou la multiplication usuelles, nous énonçons la **preuve par n** de la façon suivante :

> Soit x, y, z $\in \mathbb{Z}$:
>
> $$x \otimes y = z \Rightarrow \left(x \bmod n \otimes y \bmod n\right) \equiv z \bmod n$$

En restant dans la logique du point précédent, on peut déduire qu'en base b, les nombres n qui apportent une facilité de calcul et une grande probabilité de réussite maximale sont tels que *n=b-1*, pour autant que la base soit grande. Ainsi, dans le système binaire, aucune preuve ne s'avère vraiment efficace.

Illustrations… Utilisons une preuve par 7 dans le système octal.

$$\overline{177}^8 \times \overline{526}^8 \stackrel{?}{=} \overline{134651}^8$$

$$\left(\overline{177}^8 \bmod \overline{7}^8 \times \overline{526}^8 \bmod \overline{7}^8\right) \stackrel{?}{\equiv} \overline{134651}^8 \bmod \overline{7}^8$$

$$\left(\overline{17}^8 \bmod \overline{7}^8 \times \overline{15}^8 \bmod \overline{7}^8\right) \stackrel{?}{\equiv} \overline{24}^8 \bmod \overline{7}^8$$

$$\left(\overline{1}^8 \bmod \overline{7}^8 \times \overline{6}^8 \bmod \overline{7}^8\right) \equiv \overline{6}^8 \bmod \overline{7}^8$$

$$\overline{277777}^8 + \overline{123\,521}^8 \stackrel{?}{=} \overline{423520}^8$$

$$\left(\overline{277777}^8 \bmod \overline{7}^8 + \overline{123\,521}^8 \bmod \overline{7}^8\right) \stackrel{?}{\equiv} \overline{423520}^8 \bmod \overline{7}^8$$

$$\left(\overline{45}^8 \bmod \overline{7}^8 + \overline{16}^8 \bmod \overline{7}^8\right) \stackrel{?}{\equiv} \overline{20}^8 \bmod \overline{7}^8$$

$$\left(\overline{9}^8 \bmod \overline{7}^8 + \overline{7}^8 \bmod \overline{7}^8\right) \stackrel{?}{\equiv} \overline{2}^8 \bmod \overline{7}^8$$

$$\left(\overline{2}^8 \bmod \overline{7}^8 + \overline{0}^8 \bmod \overline{7}^8\right) \equiv \overline{2}^8 \bmod \overline{7}^8$$

Ces résultats sont **probablement** corrects.

EN FIN DE COMPTE …

Il est temps de mettre un point final à notre projet et de regarder en arrière. Au commencement, nous nous demandions comment pouvaient compter les Simpson avec seulement huit doigts. En effet le genre humain a préféré la base décimale à cause de ses dix doigts. Considérant une autre façon de compter, notre recherche nous a ouvert de nouveaux horizons et de nouveaux questionnements.

Nous sommes ressortis grandis de cette expérience qui nous a, non seulement, fourni un approfondissement de notre culture mathématique mais aussi une faculté de travailler en groupe et de mener à bien un projet.

Premièrement, d'un point de vue historique, nous nous sommes rendu compte du chemin parcouru par l'humanité pour arriver à notre système de numération positionnel. La nécessité de comptabiliser les biens obligea l'homme à inventer un système de numération. Le premier fut naturellement additif. Mais très vite, les limites de ce système de numération additionnel se manifestèrent, comme son incapacité à produire des grands nombres. Certains peuples résolurent partiellement cette difficulté en employant un système hybride, mais qui n'était pas sans tare non plus. D'abord, ce système était restreint par son nombre de symboles et, ensuite, par sa complexité de représentation.

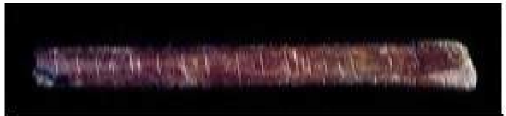
Finalement, dans des lieux éloignés, de façon isolée, une idée simple et géniale apparut : utiliser conjointement les chiffres et leur position pour désigner le nombre et surtout inventer un zéro. Le petit nombre de chiffres nécessaires, les facilités de calculs ainsi que sa capacité illimitée de représentation firent du système de numération positionnel le plus plébiscité de l'histoire.

Cependant, l'épopée du système de numération positionnel ne se limita pas à l'emploi de la base dix. D'autres bases furent employées et aujourd'hui encore, il est pertinent d'envisager l'emploi de bases différentes en fonction de nos besoins. Ainsi, nos découvertes nous ont permis d'apprécier combien les bases deux, huit et seize trouvent leur utilité dans le codage informatique, mais plus surprenant encore, que des systèmes de numération positionnels aussi insolites que celui du mathématicien belge Edouard Zeckendorf, ou les systèmes d'Avizienis ou phinaire présentent également un intérêt.

En fin de compte, que devient l'arithmétique dans un système positionnel de base différente de dix ? Le troisième épisode de cette aventure nous a montré qu'un changement de base n'altère pas ses principes généraux ni ses propriétés, seule l'apparence des calculs est modifiée. Une preuve par neuf devient une preuve par sept en base huit, mais le procédé opératoire est toujours le même. Des critères de divisibilité peuvent toujours être envisagés, dans des formes différentes, liées à la nouvelle syntaxe des nombres. Des outils comme le ruban de Pascal et l'arithmétique modulaire permettent facilement de généraliser ces derniers dans d'autres bases.

En conclusion, on peut affirmer que l'emploi de la base décimale est bien sûr légitimée par nos dix doigts, mais qu'il n'y a rien de délirant à compter comme un Simpson ou dans une autre base, d'autant qu'il y a longtemps que nous ne comptons plus sur nos doigts ! Qui sait, un jour peut-être, les générations futures auront à calculer dans un système positionnel de base huit ou seize, afin de se conformer au système numérique des machines. Les habitudes de calculs auraient certes à changer en profondeur, mais l'exercice ne serait peut-être pas plus difficile que lors du passage à la monnaie unique en 2002. Mais pour l'instant, cela relève encore de la science-fiction.

AI. FRISE CHRONOLOGIQUE



Os de Lebombo, première trace de numération

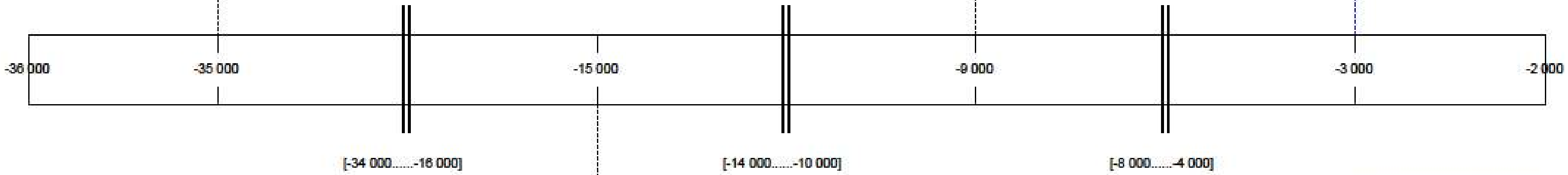
-35 000

Les Sumériens inventent le calculi

-9 000

Les Égyptiens utilisent les hiéroglyphes dans un système de numération additif

-3 000



Bois de renne entaillé

-15 000

Les Incas inventent le quipu

-2500

AI. FRISE CHRONOLOGIQUE

-2000

Les Babyloniens inventent la première numération positionnelle (de base 60)
-1800

Les Japonais et les Chinois utilisent la numération sino-japonaise, basée sur un système hybride
-1500

[-1400......-1000]

Les Grecs inventent la numération ionique, basée sur un système additif
-700

Les Romains utilisent un système de numération additif
-500

Les Grecs inventent la numération attique, basée sur un système additif
-500

AI. FRISE CHRONOLOGIQUE

Les Chinois utilisent un système de numération hybride dit "à bâtons"
-100

1

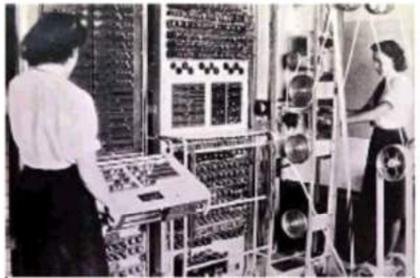
Les Mayas utilisent un système de numération positionnel
-300

Les Arméniens utilisent un système de numération additif
500

AI. FRISE CHRONOLOGIQUE

Première apparition des chiffres Indiens
1000

Première apparition des chiffres modernes
1500



Premier ordinateur fonctionnant en langage binaire, le Colossus
1937

James CAMERON crée le film Avatar et avec celui-ci la numération additive Navi
2009

1000

2000

Première apparition des chiffres arabes
1300

Blaise PASCAL
1623 à 1662

Edouard ZECKENDORF
1901 à 1983

Les Tchouvaches utilisent un système de numération additif
1901

Division euclidienne et divisibilité dans $\mathbb{Z}$

THÉORÈME

$\forall$ (a,b) $\in \mathbb{Z}$x$\mathbb{Z}_0$, $\exists$! (q,r) $\in \mathbb{Z}^2$ tel que

a= b.q + r et 0<r<|B|

On dit que a est le dividende, b le diviseur, q le quotient et r le reste dans la division de a par b.

DÉFINITION

Soit a et $b \in \mathbb{Z}$.

a divise $b \Leftrightarrow \exists\, q \in \mathbb{Z}$ tel que $b = a.q$.

On écrit alors $a|b$.

On dit aussi : «b est *divisible* par a »

«a est un *diviseur* de b ».

«b est un *multiple* de a ».

PROPRIÉTÉS

1) $\forall$ a, b ; c $\in \mathbb{Z}$: $a|b \Rightarrow a|bc$

2) $\forall$ a, b ; c $\in \mathbb{Z}$: $a|b \wedge b|\, c \Rightarrow b|\, c$

3) $\forall$ a, b ; c $\in \mathbb{Z}$, $\forall$ k, h $\in \mathbb{Z}$: $a|b \wedge a|\, c \Rightarrow a|\, (k.b+h.c)$

4) $\forall$ a $\in \mathbb{Z}$ $\forall$ b $\in \mathbb{Z}_0$ $a|b \Rightarrow |a| \leq |b|$.

Ainsi, tout entier non nul admet un nombre fini de diviseurs.

5) $\forall$ a, b $\in \mathbb{Z}$: $a/b \wedge b/a \Rightarrow a= \pm b$

Congruences et résidus modulos m

DÉFINITIONS

Soit a et $b \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{N}_0$.

a est **congru** à b modulo $m \Leftrightarrow n \mid (a-b)$

On écrit alors $a \equiv b(n)$ ou $a \equiv b \bmod n$ ou encore $a \equiv b$ ***modulo*** n

$\forall a, b \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}_0$, $a \equiv b \ (mod\ n) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : a = kn + b$

Illustrations $18 \equiv 10 mod\ 8$ *car* $8 \mid (18-10)$

De plus, $18 = 1.8 + 10$

Il est à noter que $\forall\ a \in \mathbb{Z}$ et $\forall\ b \in \mathbb{N}_0$ $a \mid b \Leftrightarrow a \equiv 0 \bmod b$

Cependant, si $a \equiv b(\mathrm{mod}\ n)$, b n'est le reste de la division de a par n que si $0 \leq b < n$.

On peut alors définir l'opération mathématique suivante :

$\forall a \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}_0$, $b = a \bmod n \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : a = kn + b$ *et* $0 \leq b < n$.

Dans ce cas, b est le reste de la division de a par n. On l'appelle « **résidu de a modulo n** ».

Illustrations $18 mod 8 = 2$

NOTION DE CLASSE

Les nombres entiers peuvent être classés selon leur congruence.

Par exemple, 2, 10, 18, 26, … sont tous congrus modulo 8.

Le reste de leur division euclidienne par 8 vaut 2.

$2 = 2 \bmod 8 = 10 \bmod 8 = 18 \bmod 8 = 26 \bmod 8$

Ces entiers font partie d'un même ensemble, appelé **classe**. Ici, 2, 10, 18 et 26 en modulo 8 appartiennent à la classe de résidu égale à 2. On notera cette classe $\overline{2_8}$.

La définition d'une classe est donc : $\overline{c_m} = \{c+k.m / k \in \mathbb{Z}\}$ tel que $\overline{c_m}$ désigne à la fois la classe (ensemble de nombres congrus modulo m) et son résidu.
Par ailleurs, il est à noter qu'il existe m classes en modulo m : $\overline{0}_m, \overline{1}_m, \overline{2}_m, ..., \overline{(m-1)}_m$ et respectivement m représentants de ces classes : 0, 1, ..., m-1.
On définit alors l'ensemble des entiers représentant les classes de modulo m:

$$\mathbb{Z}_m = \{0, 1, 2, ..., m-1\}$$
$$\mathbb{Z}_m = \{c \in \mathbb{N} \mid a=c+km, c<m, a\in\mathbb{Z}, k\in\mathbb{Z}\}$$

Opérations et congruences

On peut montrer que l'addition et la multiplication sont compatibles avec la congruence :

(1) *(a+b) (mod m) = (a (mod m) + b (mod m))(mod m)*
(2) *(a.b) (mod m) = (a (mod m) . b (mod m))(modm)*

Ceci permet de définir l'addition et la multiplication dans $\mathbb{Z}_m$:

$+ : \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_m : (\bar{a},\bar{b}) \to \bar{a}+\bar{b} = \overline{a+b}$	$. : \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_m : (\bar{a},\bar{b}) \to \bar{a}.\bar{b} = \overline{a.b}$
• Interne et partout définie $\overline{a+b} \in \mathbb{Z}_m, \forall \bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_m$ • Commutative $\forall \bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_m : \bar{a}+\bar{b} = \bar{b}+\bar{a}$ • Associative $\forall \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_m : (\bar{a}+\bar{b})+\bar{c} = \bar{a}+(\bar{b}+\bar{c})$ • Elément neutre $\forall \bar{a} \in \mathbb{Z}_m : \bar{a}+\bar{0} = \bar{0}+\bar{a} = \bar{a}$ • Inverse $\forall \bar{a} \in \mathbb{Z}_m : \bar{a}+\overline{m-a} = \bar{0}$	• Interne et partout définie $\overline{a.b} \in \mathbb{Z}_m, \forall \bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_m$ • Commutative $\forall \bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_m : \bar{a}.\bar{b} = \bar{b}.\bar{a}$ • Associative $\forall \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_m : (\bar{a}.\bar{b}).\bar{c} = \bar{a}.(\bar{b}.\bar{c})$ • Elément neutre $\forall \bar{a} \in \mathbb{Z}_m : \bar{a}.\bar{1} = \bar{1}.\bar{a} = \bar{a}$ • Distributive par rapport à + $\forall \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_m : (\bar{a}+\bar{b}).\bar{c} = \bar{a}.\bar{c}+\bar{b}.\bar{c}$

Nous avons réalisé un petit programme permettant de transcrire un nombre naturel d'une base a vers une base b quelconque, a et b étant des naturels compris entre 2 et 9.

En voici le code.

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

int main()
{
            //Ici nous initialisons les morceaux de
            mémoire qui vont contenir des chiffres
            permettant le bon fonctionnement du
            programme.
   int Base = 0;
   int BaseDebut = 0;
   int NombreChoisi = 0;
   int NombreChoisi2 = 0;
   int tour = 0;
   int NombreFinal = 0;
   int exposant = 0;
   int retirer = 0;
   int menu = 0;
   int fin = 0;
            //Ici nous initialisons les morceaux de
            mémoire qui vont contenir les différents
            chiffres qui composent le nombre de départ.
   int Nombre1 = 0;
   int Nombre2 = 0;
   int Nombre3 = 0;
   int Nombre4 = 0;
   int Nombre5 = 0;
   int Nombre6 = 0;
   int Nombre7 = 0;
   int Nombre8 = 0;
   int Nombre9 = 0;
            //Ici nous initialisons les morceaux de
            mémoire qui vont contenir les différents
            chiffres qui composent le nombre finale.
   int Chiffre1 = 0;
   int Chiffre2 = 0;
   int Chiffre3 = 0;
   int Chiffre4 = 0;
   int Chiffre5 = 0;
   int Chiffre6 = 0;
   int Chiffre7 = 0;
   int Chiffre8 = 0;
   int Chiffre9 = 0;
   int Chiffre10 = 0;
   printf("Bonjour, ce programme vous
permettra de trasformer :\n");
   printf("1. Un nombre XXXXXXXXX (9
chiffres maximun) en base a dans une base b
(les base peuvent aller de 1 a 10)\n");
   printf("2. Un nombre XXXXXXXXX (9
chiffres maximun) en base 10 dans une base
b (les base peuvent aller de 1 a 10)\n");
   printf("3. Un nombre XXXXXXXXX (9
chiffres maximun) en base a dans la base 10
(les base peuvent aller de 1 a 10)\n");
   printf("Veillez introduire le chiffre du
menu que vous avez choisi:");
   scanf("%d", &menu);
if(menu == 1)
  {
   printf("Veillez introduire la base de depart
(la base a)\n");
   scanf("%d", &BaseDebut);
   printf("Veillez introduire la base finale (la
base b)\n");
   scanf("%d", &Base);
   printf("Veillez introduire le nombre que
vous avez choisi\n");
   scanf("%d", &NombreChoisi);
            //Ici nous allons extraire les chiffres du
            nombre de base a.
   Nombre9 = NombreChoisi / 100000000 -
retirer;
         retirer = retirer + Nombre9 * 10;
Nombre8 = NombreChoisi / 10000000 -
retirer;
         retirer = retirer + Nombre8 * 10;
   Nombre7 = NombreChoisi / 1000000 -
retirer;
         retirer = retirer + Nombre7 * 10;
   Nombre6 = NombreChoisi / 100000 -
retirer;
         retirer = retirer + Nombre6 * 10;
   Nombre5 = NombreChoisi / 10000 -
retirer;
         retirer = retirer + Nombre5 * 10;
   Nombre4 = NombreChoisi / 1000 - retirer;
         retirer = retirer + Nombre4 * 10;
   Nombre3 = NombreChoisi / 100 - retirer;
```

```
        retirer = retirer * 10 + Nombre3 * 10;
    Nombre2 = NombreChoisi / 10 - retirer;
        retirer = retirer * 10 + Nombre2 * 10;
    Nombre1 = NombreChoisi / 1 - retirer;
//Ici, transcription des différents chiffres de la base a à la base b puis nous les additionnons pour obtenir le nombre en base 10.
    Nombre1 = Nombre1;
    exposant = BaseDebut;
    Nombre2 = Nombre2 * BaseDebut;
    exposant = exposant * BaseDebut;
    Nombre3 = Nombre3 * exposant;
    exposant = exposant * BaseDebut;
    Nombre4 = Nombre4 * exposant;
    exposant = exposant * BaseDebut;
    Nombre5 = Nombre5 * exposant;
    exposant = exposant * BaseDebut;
    Nombre6 = Nombre6 * exposant;
    exposant = exposant * BaseDebut;
    Nombre7 = Nombre7 * exposant;
    exposant = exposant * BaseDebut;
    Nombre8 = Nombre8 * exposant;
    exposant = exposant * BaseDebut;
    Nombre9 = Nombre9 * exposant;
    exposant = exposant * BaseDebut;
    NombreChoisi2 = Nombre1 + Nombre2 +
Nombre3 + Nombre4 + Nombre5 + Nombre6
+ Nombre7 + Nombre8 + Nombre9;
  //Ici nous allons convertir le nombre en base 10 en base b.
    while (NombreChoisi2 != 0)
    {
      if (tour == 0)
      {
        Chiffre1 = NombreChoisi2 % Base;
      }
      if (tour == 1)
      {
        Chiffre2 = NombreChoisi2 % Base;
      }
      if (tour == 2)
      {
        Chiffre3 = NombreChoisi2 % Base;
      }
      if (tour == 3)
      {
        Chiffre4 = NombreChoisi2 % Base;
      }
      if (tour == 4)
      {
        Chiffre5 = NombreChoisi2 % Base;
      }
      if (tour == 5)
      {
        Chiffre6 = NombreChoisi2 % Base;
      }
      if (tour == 6)
      {
        Chiffre7 = NombreChoisi2 % Base;
      }
      if (tour == 7)
      {
        Chiffre8 = NombreChoisi2 % Base;
      }
      if (tour == 8)
      {
        Chiffre9 = NombreChoisi2 % Base;
      }
      if (tour == 9)
      {
        Chiffre10 = NombreChoisi2 % Base;
      }
      NombreChoisi2 = NombreChoisi2 / Base;
      tour++;
    }
      //Ici nous plaçons chaque symbole au bon rang.
Chiffre1 = Chiffre1 * 1;
Chiffre2 = Chiffre2 * 10;
Chiffre3 = Chiffre3 * 100;
Chiffre4 = Chiffre4 * 1000;
Chiffre5 = Chiffre5 * 10000;
Chiffre6 = Chiffre6 * 100000;
Chiffre7 = Chiffre7 * 1000000;
Chiffre8 = Chiffre8 * 10000000;
Chiffre9 = Chiffre9 * 100000000;
Chiffre10 = Chiffre10 * 1000000000;
  }
  if(menu == 2)
  {
   BaseDebut = 10;
   printf("Veillez introduire la base finale (la
base b)\n");
   scanf("%d", &Base);
   printf("Veillez introduire le nombre que
vous avez choisi\n");
   scanf("%d", &NombreChoisi);
   NombreChoisi2 = NombreChoisi;
  //Ici nous allons convertir le nombre en base 10 en base b.
   while (NombreChoisi2 != 0)
   {
     if (tour == 0)
     {
       Chiffre1 = NombreChoisi2 % Base;
     }
     if (tour == 1)
     {
```

```
        Chiffre2 = NombreChoisi2 % Base;
      }
      if (tour == 2)
      {
        Chiffre3 = NombreChoisi2 % Base;
      }
      if (tour == 3)
      {
        Chiffre4 = NombreChoisi2 % Base;
      }
      if (tour == 4)
      {
        Chiffre5 = NombreChoisi2 % Base;
      }
      if (tour == 5)
      {
        Chiffre6 = NombreChoisi2 % Base;
      }
      if (tour == 6)
      {
        Chiffre7 = NombreChoisi2 % Base;
      }
      if (tour == 7)
      {
        Chiffre8 = NombreChoisi2 % Base;
      }
      if (tour == 8)
      {
        Chiffre9 = NombreChoisi2 % Base;
      }
      if (tour == 9)
      {
        Chiffre10 = NombreChoisi2 % Base;
      }
      NombreChoisi2 = NombreChoisi2 / Base;
      tour++;
    }
 //Ici nous plaçons chaque chiffre au bon rang.
Chiffre1 = Chiffre1 * 1;
Chiffre2 = Chiffre2 * 10;
Chiffre3 = Chiffre3 * 100;
Chiffre4 = Chiffre4 * 1000;
Chiffre5 = Chiffre5 * 10000;
Chiffre6 = Chiffre6 * 100000;
Chiffre7 = Chiffre7 * 1000000;
Chiffre8 = Chiffre8 * 10000000;
Chiffre9 = Chiffre9 * 100000000;
Chiffre10 = Chiffre10 * 1000000000;
  }
  if(menu == 3)
  {
   int base = 10;
   printf("Veillez introduire la base de depart
(la base a)\n");
   scanf("%d", &BaseDebut);
   printf("Veillez introduire le nombre que
vous avez choisi\n");
   scanf("%d", &NombreChoisi);
   Base = 10;
      //Ici nous allons extraire les symboles du
                              nombre de base a.
   Nombre9 = NombreChoisi / 100000000 -
retirer;
         retirer = retirer + Nombre9 * 10;
   Nombre8 = NombreChoisi / 10000000 -
retirer;
         retirer = retirer + Nombre8 * 10;
   Nombre7 = NombreChoisi / 1000000 -
retirer;
         retirer = retirer + Nombre7 * 10;
   Nombre6 = NombreChoisi / 100000 -
retirer;
         retirer = retirer + Nombre6 * 10;
   Nombre5 = NombreChoisi / 10000 -
retirer;
         retirer = retirer + Nombre5 * 10;
   Nombre4 = NombreChoisi / 1000 - retirer;
          retirer = retirer + Nombre4 * 10;
   Nombre3 = NombreChoisi / 100 - retirer;
          retirer = retirer * 10 + Nombre3 * 10;
   Nombre2 = NombreChoisi / 10 - retirer;
          retirer = retirer * 10 + Nombre2 * 10;
   Nombre1 = NombreChoisi / 1 - retirer;
//Ici nous passons les différents symboles de la
    base a à la base b puis nous les additionnons
                pour obtenir le nombre en base 10.
   Nombre1 = Nombre1;
    exposant = BaseDebut;
   Nombre2 = Nombre2 * BaseDebut;
    exposant = exposant * BaseDebut;
   Nombre3 = Nombre3 * exposant;
    exposant = exposant * BaseDebut;
   Nombre4 = Nombre4 * exposant;
    exposant = exposant * BaseDebut;
   Nombre5 = Nombre5 * exposant;
    exposant = exposant * BaseDebut;
   Nombre6 = Nombre6 * exposant;
    exposant = exposant * BaseDebut;
   Nombre7 = Nombre7 * exposant;
    exposant = exposant * BaseDebut;
   Nombre8 = Nombre8 * exposant;
    exposant = exposant * BaseDebut;
   Nombre9 = Nombre9 * exposant;
    exposant = exposant * BaseDebut;
   NombreChoisi2 = Nombre1 + Nombre2 +
Nombre3 + Nombre4 + Nombre5 + Nombre6
+ Nombre7 + Nombre8 + Nombre9;
```

```
  //Ici nous allons convertir le nombre en base
                                    10 en base b.
  while (NombreChoisi2 != 0)
  {
    if (tour == 0)
    {
      Chiffre1 = NombreChoisi2 % Base;
    }
    if (tour == 1)
    {
      Chiffre2 = NombreChoisi2 % Base;
    }
    if (tour == 2)
    {
      Chiffre3 = NombreChoisi2 % Base;
    }
    if (tour == 3)
    {
      Chiffre4 = NombreChoisi2 % Base;
    }
    if (tour == 4)
    {
      Chiffre5 = NombreChoisi2 % Base;
    }
    if (tour == 5)
    {
      Chiffre6 = NombreChoisi2 % Base;
    }
    if (tour == 6)
    {
      Chiffre7 = NombreChoisi2 % Base;
    }
    if (tour == 7)
    {
      Chiffre8 = NombreChoisi2 % Base;
    }
    if (tour == 8)
    {
      Chiffre9 = NombreChoisi2 % Base;
    }
    if (tour == 9)
    {
      Chiffre10 = NombreChoisi2 % Base;
    }
    NombreChoisi2 = NombreChoisi2 / Base;
    tour++;
  }
    //Ici nous plaçons chaque symbole au bon
                                          rang.
Chiffre1 = Chiffre1 * 1;
Chiffre2 = Chiffre2 * 10;
Chiffre3 = Chiffre3 * 100;
Chiffre4 = Chiffre4 * 1000;
Chiffre5 = Chiffre5 * 10000;
Chiffre6 = Chiffre6 * 100000;
Chiffre7 = Chiffre7 * 1000000;
Chiffre8 = Chiffre8 * 10000000;
Chiffre9 = Chiffre9 * 100000000;
Chiffre10 = Chiffre10 * 1000000000;
  }
NombreFinal = Chiffre1 + Chiffre2 + Chiffre3
+ Chiffre4 + Chiffre5 + Chiffre6 + Chiffre7 +
Chiffre8 + Chiffre9 + Chiffre10;
printf("Le nombre %d en base %d vaut %d
en base %d ",NombreChoisi ,BaseDebut ,
NombreFinal ,Base);
scanf("%d", &fin);
   return 0;
}
```

- ASSISTANCE SCOLAIRE PERSONNALISÉE, ***Lexique (nombre rationnel, nombre irrationnel)***, http://www.assistancescolaire.com/eleve/3e/maths/lexique/N-nombre-rationnel-nombre-irrationnel-mc_n05, consulté en octobre 2013.
- BARTOLUCCI A., ***La longue histoire des outils pour « dénombrer » et pour communiquer « la quantité », L'histoire des systèmes de numération,*** 2012, http://www.pratiquemath.org/spip/IMG/pdf/histoiredesnombres48.pdf
- BIANCO S, ***Arithmétique, nombres et jeux mathématiques,*** 2008, Ecole Polytechnique de Lausanne.
- BIG BROWSER, ***12/12/12-Et si on remplaçait le système décimal par un système en base 12 ?,*** http://bigbrowser.blog.lemonde.fr/2012/12/12/121212-et-si-on-remplacait-le-systeme-decimal-par-un-systeme-en-base-12/, consulté en novembre 2013.
- CAUTY, A. & HOPPAN, J.-M., ***Et un, et deux zéros mayas,*** 2005, Dossier Pour la Science: Mathématiques exotiques.
- CAUTY A., ***Taxinomie, syntaxe et économie des numérations parlées***, 1984, Institut de mathématiques, Nantes.
- DE MEY L, ***Mathématiques appliquées à l'informatique,*** dernière révision en juin 2008, disponible sur http://gilles.costantini.pagesperso-orange.fr/agreg_fichiers/BaseNum.pdf, consulté en octobre 2013.
- DE RAGO TH, ***Base de numération d'entiers. Applications ,*** http://gilles.costantini.pagesperso-orange.fr/agreg_fichiers/BaseNum.pdf, consulté en octobre 2013.
- EGYPTE ANCIENNE, ***Les fractions Egyptiennes,*** sur http://www.egypte-ancienne.fr/fractions_egyptiennes.htm, consulté en novembre 2013.
- ENCYCLOPÉDIE EN LIGNE LIBRE DE DROIT, ***Base (arithmétique)***, http://fr.wikipedia.org/wiki/Base_(arithm%C3%A9tique), consulté en octobre 2013.
- ENCYCLOPÉDIE EN LIGNE LIBRE DE DROIT, ***Nombre irrationnel***, http://fr.wikipedia.org/wiki/Nombre_irrationnel, consulté en octobre 2013.
- GONZE D., ***Les Nombres, De l'os d'Ishango au système bibi***, 2012, http://homepages.ulb.ac.be/~dgonze/MATH/NOMBRES/nombres.pdf
- IFRAH G, ***Histoire universelle des chiffres, L'intelligence des hommes racontée par les nombres et le calcul,*** 1994, Robert Laffont, Paris.
- HOPPENOT P, ***Informatique Industrielle, Numération***, 1999, IUT d'Evry Val d'Essonne
- LYCEE JANETTI, ***Codage d'un nombre,*** http://www.isn.cligniez.fr/ressources/codage_nombre.pdf, consulté en octobre 2013.
- RIGO M., ***Automates et systèmes de numération***, 2005, Université de Liège.

- POSITRON LIBRE, ***Conversion et changement de base***, http://www.positron-libre.com/cours/electronique/systeme-numeration/conversion-decimal-binaire-hexadecimal.php , consulté en octobre 2013.
- SAKAROVITCH J., ***La machine à diviser de Monsieur Pascal in Eléments de théorie des automates,*** 2003, éd. Vuibert, disponible sur http://www.infres.enst.fr/~jsaka/ETA/prologue_ext.pdf
- VAN NEERDEN T., ***Binaire et hexadécimal***, http://lehollandaisvolant.net/tuto/bin.php#bh, consulté en octobre 2013.
- VIRNIK EVOLUTION, ***The Number Base Calculator version 1.4,*** http://www.cleavebooks.co.uk/scol/calnumba.htm, 2004

ICONOGRAPHIE

Introduction

Figure 1 et 2 : Matt Groening , Guide to Mathematics and Mathematicians on The Simpsons, Compiled by Dr. Andrew Nestler, Santa Monica College, http://homepage.smc.edu/nestler_andrew/SimpsonsMath.htm

Partie I

Figure 1, 2, 5 : Gonze D., Les Nombres, De l'os d'Ishango au système bibi, 2012
Figure 3 : Ross A., Systèmes de numération, Du concret à l'abstrait, Cégep de Lévis-Lauzon.
Figure 4 : Histoire de Chiffres, http://histoiredechiffres.free.fr/numeration/sumeriens.htm
Figure 7 : De La Porte 1786
Figure 8 : http://mathworld.wolfram.com/EyeofHorusFraction.html
Figure 9: Mathematics in Egyptian Papyri, http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/Egyptian_papyri.html
Figure 10: The Greek islands specialists, http://www.greeka.com/greece-maps/ancient-greece-map.htm
Figure 11: Les géomètres de la Grèce antique de Bernard Vitrac sur http://culturemath.ens.fr/
Figure 12: http://www.encyclopedie-universelle.com/abaque-calcul3-grece.html
Figure 13: Atlas of Ancient and Classical Geography 1907 sur http://miltiade.pagesperso-orange.fr/carte-empire-romain-trajan.htm
Figure 14: Encyclopédie en ligne libre de droit, http://fr.wikipedia.org/wiki/Colis%C3%A9e
Figure 15: Encyclopédie en ligne libre de droit, http://fr.wikipedia.org/wiki/Numeration_romaine
Figure 16: Le Quatre d'Horloger, sur ORNICAR, http://www.ornicar.be/quatre-horloger/
Figure 17: © INRIA / Photo J.-M. Ramès
Figure 18: Russie-Libertés, La Tchouvachie, http://russie-libertes.org/tag/tchouvachie/
Figure 19: Encyclopédie en ligne libre de droit, http://fr.wikipedia.org/wiki/Numeraion_tchouvache
Figure 20 : http://francais.islammessage.com/Article.aspx?i=3537
Figure 21: Avatar, James Cameron © Twentieth Century Fox
Figure 23 : Textes chinois annotés, http://www.jlsigrist.com/chinois.html

Figure 24 : Charbonneau L., L'écriture des nombres naturels, http://www.math.uqam.ca
Figure 25 : Tianwei X., Conversational Mandarin On Line, http://www.csulb.edu/~txie/ccol/04/practice.htm
Figure 26 : Pourquoi vous devez utiliser un boulier et non une calculatrice ?, http://plusbelleslesmaths.com/
Figure 27 : Institut Français de l'Education, http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/ressources/documents/bouliers/bouliers/
Figure 29 : © Encyclopaedia Universalis, S.A.
Figure 30 : Mésopotamie, http://perso.numericable.fr/jlconstant/zportail/recits_de_cathy/sphere/mesopotamie.htm
Figure 31 : Zéro, Histoire du nombre, sur Math93 Une histoire des Mathématiques, http://www.math93.com/index.php/histoire-des-maths/histoire-des-nombres/157-le-zero
Figure 32 : Indo-européens, Mésopotamie (Asie mineure), http://pythacli.chez-alice.fr/civilisations/babyloniens.htm
Figure 33 : Gonze D., Les Nombres, De l'os d'Ishango au système bibi, 2012
Figure 34 : CAUTY, A. & HOPPAN, J.-M.: Et un, et deux zéros mayas 2005, Dossier Pour la Science: Mathématiques exotiques
Figure 35 : Les Amérindiens du sud : Aztèques, Mayas et Incas, http://bv.alloprof.qc.ca/histoire/
Figure 38 : El quipu: una calculadora en el Imperio Inca, http://quhist.com/quipu-imperioinca-america-precolombina/
Figure 39 : Encyclopédie en ligne libre de droit, http://fi.wikipedia.org/wiki/Machu_Picchu
Figure 40 : Haarmann H., Universalgeschichte der Schrift, http://www.indianer-welt.de/sued/inka/inka-quipu.htm
Figure 41 : Universidad Nacional de Colombia, http://www.unal.edu.co/quipu/quees.htm

Partie II

Figure 1, 2, 3 : IFRAH G, Histoire universelle des chiffres
Figure 4 : Encyclopédie en ligne libre de droit, http://en.wikipedia.org/wiki/Mu%E1%B8%A5ammad_ibn_M%C5%ABs%C4%81_al-Khw%C4%81rizm%C4%AB
Figure 5 : Roussel J, La chronique du Professeur SHADOKO, http://perso.cimetz.com/jvoyenne/shadok/devises.htm
Figure 6 : http://bricologie.free.fr/photos/analy.jpg, http://www.grimac.fr/lang-en/interrupteurs-et-commutateurs/1039-interrupteur-bipolaire-noir-01.html, http://www.mathovore.fr/defi-3eme-forum-maths-685.php, http://tpe-physique-cuisine.pagesperso-orange.fr/tpe-appareils-eclairage-incandescence.html
Figure 7 : CHENIAUX Samuel.
Figure 8 : Mémoires mortes (ROM), http://daniel.robert9.pagesperso-orange.fr/Digit/Digit_12TS2.html

Partie III

Figure 1 et 2 : Matt Groening , Guide to Mathematics and Mathematicians on The Simpsons, Compiled by Dr. Andrew Nestler, Santa Monica College, http://homepage.smc.edu/nestler_andrew/SimpsonsMath.htm
Figure 3 et 4 : Big Browser, 12/12/12 – Et si on remplaçait le système décimal par un système en base 12 ?
Figure 5 : Encyclopédie en ligne libre de droit, http://fr.wikipedia.org/wiki/Rapporteur
Figure 6 : Encyclopédie en ligne libre de droit, http://en.wikipedia.org/wiki/Blaise_Pascal