

Connecting Masterpieces

Comment les maths font-elles le pont?

Aurélien DELBROUCK
Camie EGGERMONT
Sébastien GILET
Martin GUILLAUMIE
Nicolas HERMAN

Antoine LATOUR
Maxime LEJEUNE
Simon QUIRINY
François QUIRYNEN
Gilles SOENEN

Sous la supervision de Mme. DE BLEECK



Table des matières

I. Introduction.....	3
II. Terminologie.....	4
III. Les charges agissant sur un pont	5
1. Les efforts internes.....	5
2. Contrainte, résistance et coefficient de sécurité	8
3. Le poids	9
4. Les contraintes environnementales	12
IV. Typologie des ponts.....	17
1. Les ponts à poutre	17
2. Les ponts en arc	19
3. Les ponts suspendus	21
4. Les ponts à haubans	23
5. Classement des ponts dans le temps et selon les portées	25
V. Les matériaux utilisés.....	26
1. Autrefois, le bois et la pierre	26
2. Le béton	27
3. L'acier.....	28
VI. Le pont himalayen ou chaînette	30
1. Introduction	30
2. Représentation des forces en présence	31
3. La composante horizontale des tensions est constante.....	32
4. Expression de la tension verticale.....	33
5. Résolution de l'équation différentielle.....	35
6. Calcul de la longueur du câble	37
7. Etude de la tension dans le câble	38
VII. Les ponts suspendus	43
1. Bilan des forces sur une portion infinitésimale de câble	43
2. Recherche des tensions dans le câble	44
3. Etude de la tension dans le câble	46
4. Calcul de la longueur du câble	47
5. Calcul des forces agissant sur les pylônes.....	48

6. Application au cas du Golden Gate.....	49
7. Un brin d'histoire.....	51
VIII. Les ponts à haubans	53
1. Tension dans un hauban.....	54
2. Etude de différentes configurations.....	57
3. Application du cas du Viaduc de Millau	62
IX. La construction d'un pont	64
1. Les fondations.....	65
2. Les piles.....	67
3. Les pylônes.....	68
4. Le tablier.....	70
• <i>L'encorbellement</i>	71
• <i>Le poussage</i>	72
5. Les haubans.....	74
6. Les finitions.....	76
Conclusion	77
Bibliographie – Webographie - Iconographie	78
<i>Annexe I : Le Viaduc de Millau</i>	
<i>Annexe II : Fonctions hyperboliques</i>	

I. Introduction

« Quand je serai grand, je construirai des ponts »

Depuis l'aube de la civilisation, l'homme construit des ponts.

Autrefois, la construction de ces ouvrages d'art reposait sur un savoir-faire d'artisans. Au cours des siècles, les techniques évoluèrent, de nouveaux matériaux firent leur apparition, et les artisans devinrent des ingénieurs. En effet, si la méthode de construction des ponts d'hier était secrète et transmise de compagnons en compagnons, le pont d'aujourd'hui tient aussi ses performances de « trouvailles » mathématiques et méthodes de calcul qui ont évolué rapidement ces dernières années avec l'avènement de l'outil informatique.

Comme plusieurs d'entre nous envisagent des études dans le domaine du génie civil, nous avons tout naturellement cherché à comprendre dans quelle mesure les mathématiques interviennent dans l'édification de cet élément devenu incontournable dans notre environnement : le pont.

Notre première question a été dictée par le paysage : pourquoi les ponts ne sont-ils pas toujours les mêmes ? Quelles sont les contraintes de construction ? Quels matériaux utiliser ?

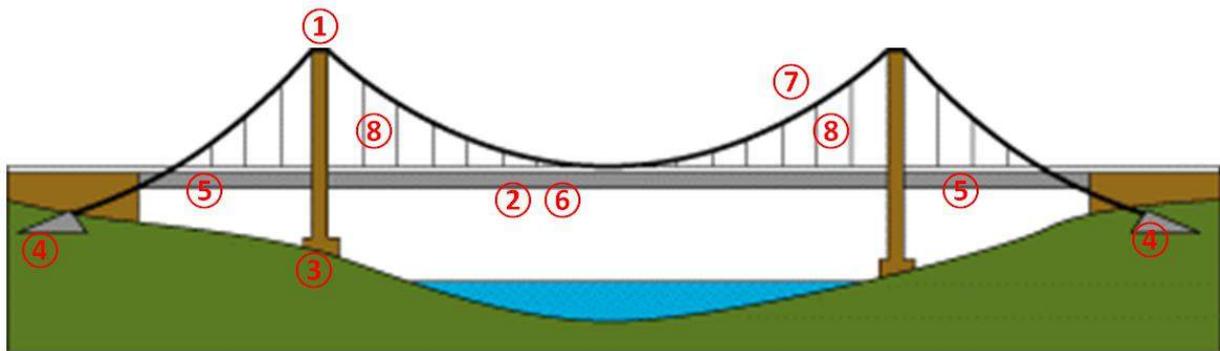
Nous avons pu constater que les ponts se classaient en quatre familles principales- pont à poutres, pont à arc, ponts suspendus, ponts haubanés- aux caractéristiques propres. Dans notre périple, au détour du pont himalayen, nous avons croisé l'équation de la chaînette. Ce fut l'occasion de réaliser un travail plus mathématique comportant des problèmes d'optimisation ou de calcul d'intégrales.

La découverte des ponts haubanés ne pouvait se faire sans aborder le Viaduc de Millau, célèbre pont français, mais qui doit son existence au travail d'une équipe d'ingénieurs belges. Nous avons eu d'ailleurs l'immense chance de rencontrer son chef de projet, Monsieur Jean-Marie CREMER, un ingénieur-artisan des temps modernes, qui nous a communiqué sa passion pour ce formidable métier : constructeur de ponts.

II. Terminologie

Lors de la construction d'une route, il arrive toujours un moment où l'on rencontre un obstacle qu'il soit naturel comme un cours d'eau ou artificiel comme une voie ferrée. Trois solutions s'offrent alors au chef de projet : contourner l'obstacle en faisant un détour, éliminer l'obstacle (remblayer une brèche, détourner un cours d'eau), faire un tunnel pour passer au travers ou ... faire un pont !

Un pont est donc un ouvrage construit en élévation, permettant de franchir un obstacle, nommé brèche.



Les éléments constitutifs sont principalement :

- **Les appuis**

Ceux-ci transmettent au sol les actions provenant du tablier. Ils sont généralement en béton armé. Parmi les appuis, on retrouve les **piles ①** qui soutiennent le **tablier ②**, qui transmettent les charges aux **fondations ③** et les **culées ④**, qui sont des appuis d'extrémité et assurent le soutènement du remblai d'accès à l'ouvrage.

- **Le tablier ②**

C'est sur le tablier que les véhicules circulent. Il comporte les **travées de rive ⑤** qui relient la rampe d'accès au premier pylône et la **travée centrale ⑥**, partie du pont située entre deux piles. Par travée, on entend l'espace compris entre deux points d'appuis principaux du pont.

- **Les câbles**

Dans les ponts suspendus, on trouve les câbles porteurs ⑦. Les câbles porteurs fixés au sommet des piles soutiennent les suspentes ⑧, plus petits câbles, qui elles-mêmes soutiennent le tablier. Dans un pont haubané, les câbles tendus portent le nom de hauban (cf. section VIII).

III. Les charges agissant sur un pont

Les personnes qui conçoivent le pont doivent tenir compte de toutes les forces qui peuvent agir sur la structure. La connaissance de ces forces permet de dimensionner la structure de sorte qu'elle ne rompe pas, ni qu'elle ne se déforme de façon excessive.

L'ensemble des forces ou contraintes agissant sur un pont porte le nom de charges. La détermination de ces charges (origine, nature, intensité, limite maximale) est une étape majeure, mais difficile dans la construction d'un pont. En général, les charges à considérer, leur mode de calcul et leur intensité maximale sont fixées par des normes officielles. On distingue deux types de charges :

1. Les charges permanentes comme le poids propre de la structure ;
2. Les charges dites d'exploitation, variables : le trafic, et les sollicitations environnementales et occasionnelles comme le vent et l'activité sismique.

Les charges agissant sur le pont se répartissent dans tout l'ouvrage, du sommet des pylônes jusqu'aux fondations. Elles peuvent être verticales (transmission du poids ou effet de portance du vent par exemple) ou horizontales (effet de dilatation, action du vent et des terres aux culées, freinage des véhicules, séisme, ...).

Les charges extérieures engendrent donc des forces internes, à l'intérieur même des structures, visant à les déformer : on parle d'efforts internes.

1. Les efforts internes

Un corps soumis à des forces extérieures est diversement sollicité. Et un corps sollicité se déforme : une pièce tendue s'allonge, une pièce comprimée se raccourcit, deux sections contiguës d'une pièce cisailée glissent l'une sur l'autre, lorsqu'une pièce est tordue, chacune de ses sections glisse en tournant par rapport aux sections contiguës.

Un ouvrage subit généralement plusieurs types d'efforts concentrés en différents endroits de la structure.

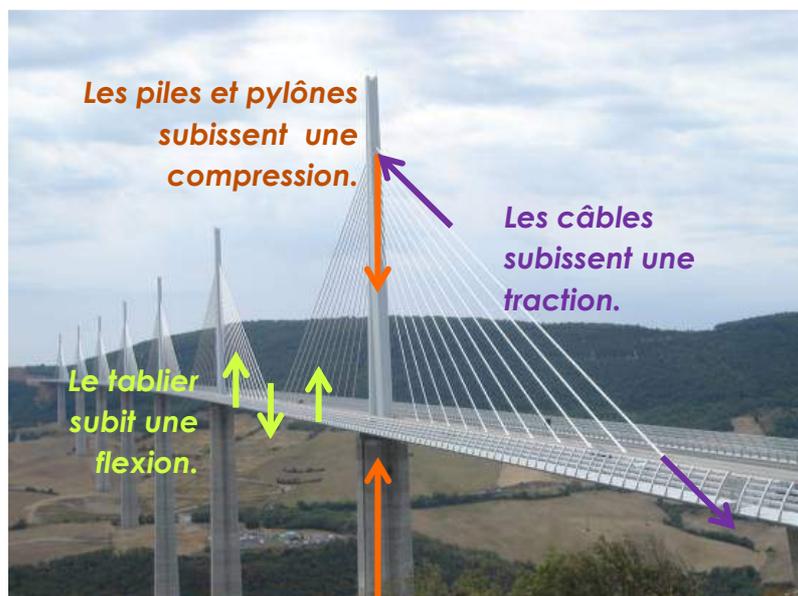
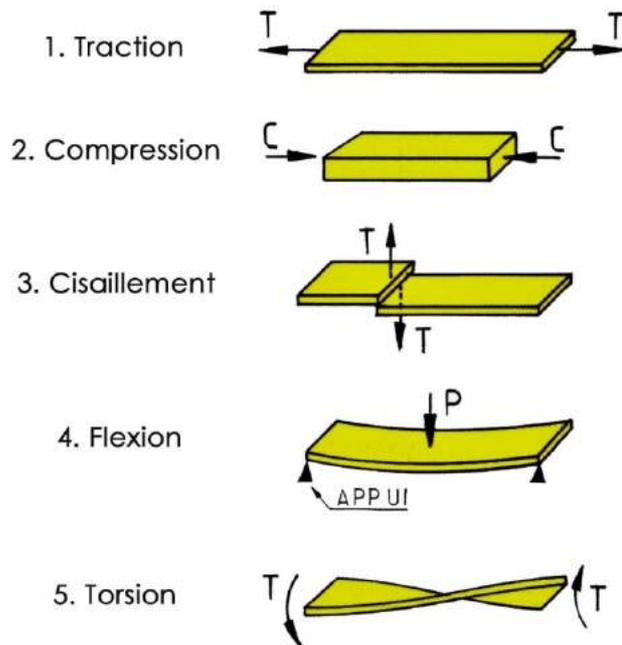
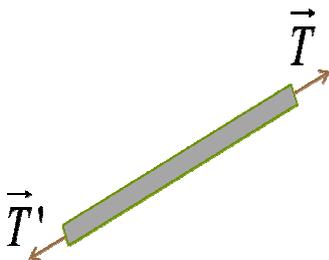


Figure III.1 : Les forces existant sur un pont

Les efforts intérieurs peuvent être classés en 5 catégories :



• Traction



La résultante de deux forces opposées appliquées à un corps "vers l'extérieur", forme une force qui tend à étirer le corps en question: il y a allongement possible.

L'effet d'une force de traction dépend du matériau sur lequel elle agit : si le matériau est "fragile", il peut rompre à partir d'un certain seuil, sans étirement préalable.

Le matériau utilisé pour les câbles dans un pont à haubans, par exemple, doit au contraire pouvoir être étiré jusqu'à un certain seuil sans rompre. Il peut alors subir une déformation, réversible ou non (élastique ou plastique). Pour chaque matériau, il est donc important de connaître sa "**limite d'élasticité**" : tant que la tension que subit le câble est inférieure à cette limite, celui-ci est étiré, mais de façon non permanente ; et sa « **limite de rupture** » au-delà de laquelle le câble rompt.

Dans le cas de la construction d'un pont, on ne discerne pas ces deux limites ; on parle de "contrainte maximale admissible", située évidemment sous la limite d'élasticité, puisque l'on veut éviter les déformations trop importantes.

• Compression

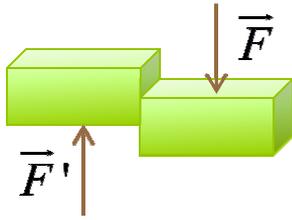
La résultante de deux forces opposées appliquées à un corps "vers l'intérieur", forme une force qui tend à comprimer le corps en question : il y a écrasement possible.

Là aussi, selon la nature du matériau subissant une telle force, les effets de celle-ci varient : ils peuvent occasionner une rupture (pour un bâton, par exemple) ou un écrasement (type "pâte à modeler").

Pour supporter ces forces de compression, le béton est le matériau dont les propriétés et le prix présentent le plus d'intérêt. Ainsi il possède une résistance à la compression de 35 MPa (valeur 10x plus élevée que sa résistance en traction).



- **Cisaillement**



Généralement, les forces entraînant un cisaillement sont appliquées perpendiculairement à l'axe de la barre. On parle d'effort tranchant. Le corps est soutenu de telle sorte que ses deux tronçons, placés de part et d'autre de sa section dans le plan de laquelle agissent les forces, ne peuvent que glisser l'un sur l'autre.

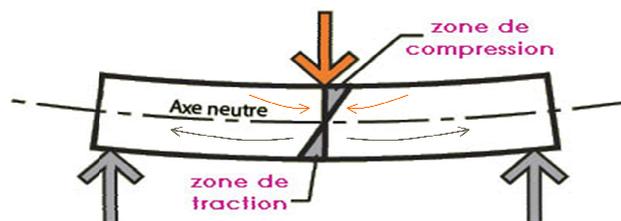
- **Flexion**

La flexion est le résultat des sollicitations sur un corps qui tendent à modifier sa courbure.

L'axe de la barre fléchit, c'est-à-dire change de courbure, lorsqu'elle est soumise à plusieurs forces qui exercent sur elle des moments de force (dits fléchissant) tendant à faire tourner ses sections droites les unes par rapport aux autres, autour d'axes perpendiculaires à sa direction générale.

Certaines parties intérieures de la barre subissent une traction, alors que d'autres subissent une compression.

Les unes et les autres sont d'autant plus allongées ou raccourcies qu'elles sont plus éloignées de l'axe neutre (partie non déformée) situées dans la région moyenne.



Le tablier d'un pont, soumis à la flexion, doit généralement supporter conjointement ces forces de traction et de compression.

Les matériaux utilisés pour les construire doivent donc être à même de résister à la traction (partie inférieure) et à la compression (partie supérieure). Ainsi la pierre ou la fonte, qui ont une faible résistance à la traction, ne peuvent convenir que si la distance entre les butées qui la supportent est faible (car autrement la déformation en extension de la partie inférieure conduira à la rupture). On peut augmenter cette portée en utilisant du béton armé.

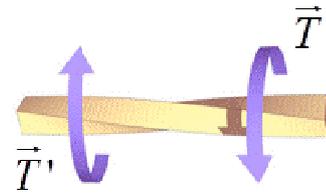
Le bois, bien qu'il résiste aussi bien en compression qu'en traction, possède malgré tout une résistance modérée qui conduit également à des portées faibles.

Il est fréquent d'utiliser le béton pour concevoir les tabliers de pont. Or le béton est très peu élastique et résiste moins bien à la traction. C'est pourquoi on le coule autour de barres d'acier, préalablement tendues ou non : c'est le béton précontraint ou armé. Celles-ci permettent de prendre en charge efficacement les forces de tension ; plus leur nombre est grand, plus la résistance de l'ensemble est importante. Cet aspect est expliqué dans le chapitre V consacré aux matériaux.

• Torsion

La **torsion** est la déformation subie par un corps soumis à l'action de deux couples opposés agissant dans des plans parallèles.

Des conditions climatiques particulières, comme un vent violent, peuvent amener le tablier d'un pont à se tordre.



2. Contrainte, résistance et coefficient de sécurité

Lorsqu'une pièce est sollicitée, chaque élément de section déformée résiste à un certain effort. C'est la valeur de cet effort, évaluée pour l'unité d'aire de la section qui est la contrainte :

τ : contrainte tangentielle (ou " de glissement ") si elle est dans la direction de la section (cisaillement, torsion).

σ : contrainte normale, si elle est perpendiculaire à la section (extension, compression, flexion).

Intéressons-nous à la contrainte normale. Les efforts auxquels un élément est capable de résister sont proportionnels à l'aire de sa section et sont indépendants de sa forme. Il en résulte que la contrainte, constante en tous les points de la section, vaut:

$$\sigma = \frac{N}{S} \quad \text{Où } N \text{ représente la force normale agissant sur la section.}$$

La contrainte s'évalue donc dans le système légal en N/mm².

Si R représente la résistance du matériau, la sécurité de l'ouvrage est assurée si :

$$R > \sigma$$

Mais la connaissance de la contrainte en utilisation normale n'est pas suffisante : il faut prévoir la possibilité d'une utilisation inadaptée comme une surcharge accidentelle. On corrige alors la contrainte par un coefficient de majoration, noté habituellement s et dont la valeur est supérieure à 1. Ces coefficients sont définis par des normes établies pour chaque domaine d'utilisation.

La contrainte pratique est alors $\sigma_p = s \cdot \sigma$

La contrainte majorée doit permettre de choisir le matériau à utiliser en fonction de sa résistance R .

$$R > \sigma_p$$

Cette résistance peut être donnée par des normes ou bien par le fournisseur, ou encore être déterminée par des essais effectués en laboratoire. Plus le coefficient de majoration est grand, moins la construction est à la merci d'un dépassement accidentel de R .

Par exemple, prenons l'acier dont la propriété mécanique la plus souvent mise en avant est sa résistance à la traction.

Considérons par exemple une charge de 2 kN qui doit être supportée par un acier E30 de résistance $R = 280 \text{ N/mm}^2$. Si on choisit un coefficient de sécurité égal à 4, on a la relation suivante :

$$R > \sigma_p \Leftrightarrow 280 > 4 \cdot \frac{2 \cdot 10^3}{S} \Leftrightarrow S > 29 \text{ mm}^2$$

Cet acier ne pourra être employé que dans une structure apportant une section supérieure à 29 mm^2 .

3. Le poids

Un pont doit avant tout résister à son propre poids. Le poids fait partie des charges statiques, car il s'applique progressivement, sans vibration ni choc.

D'une part, nous avons le **poids mort**, fixe et invariable qui comprend le poids propre de la structure (tablier, pylônes, câbles) et de la « superstructure » (équipement en général comme la couche d'étanchéité et de roulement, les barrières, les corniches et collecteurs).

Considérable, le poids permet de stabiliser l'ouvrage. On utilise souvent du béton. Des matériaux comme l'aluminium ou l'acier peuvent être utilisés pour alléger l'ensemble, mais on ne cherche pas à avoir le poids minimum, dans un souci de stabilité.

La formule permettant de calculer les poids est bien connue de tous :

$$\vec{P} = M \vec{g}$$

Où g représente la constante de pesanteur. Bien qu'elle soit égale sous nos latitudes à $9,81 \text{ m/s}^2$, pour faciliter les calculs, la valeur communément admise est 10 m/s^2 .

Les charges permanentes dépendent de la densité des matériaux utilisés et de la quantité de matière mise en place.

Pour déterminer la masse, on utilise les masses volumiques des matériaux utilisés, dont voici un ordre de grandeur :

	Masse volumique	Poids
Acier	7,8 tonnes/m ³	≈ 78 kN/m ³
Béton normal	2,4 tonnes/m ³	≈ 24 kN/m ³
Béton armé	2,5 tonnes /m ³	≈ 25 kN/m ³
Aluminium	2,7 tonnes /m ³	≈ 27 kN/m ³
Bois	Entre 0.35 et 1.1 tonnes/m ³	≈ 3.5-11 kN/m ³

Au poids propre du pont, il faut ajouter toutes les charges possibles et variables qui pourraient l'alourdir. On parle dans ce cas de **charges d'exploitation**.

Un premier type concerne les utilisateurs du pont : véhicules, piétons, mais aussi matières entreposées, locaux, ... Il faut que le pont supporte un éventuel embouteillage par exemple. Les effets de cette exploitation présentent un aspect « statique » : les usagers ajoutent leur propre poids à la structure, et un aspect « dynamique » : les usagers circulent et se présentent comme des charges mobiles susceptibles d'être freinées et de contribuer ainsi aux efforts horizontaux, ce qui ne rend pas leur prise en compte facile.

Il existe des tables officielles basées sur des statistiques que l'ingénieur doit consulter pour le dimensionnement d'une structure. Il s'agit des **Eurocodes**. Les Eurocodes sont des documents de référence reconnus par les autorités des états membres de l'Union européenne qui présentent un ensemble de règles techniques établies pour assurer la durabilité et la robustesse des bâtiments.

Dans le cas des ponts, la charge d'exploitation est calculée en fonction de l'importance du pont dans le réseau routier, du nombre de voies qu'il présente, du type de véhicule qui l'emprunte.

Un autre type de charge est climatique. Il regroupe tous les phénomènes naturels tels que la neige ou la pluie. Dans la plupart des cas, et particulièrement dans nos contrées, ces charges sont négligeables car un système de drainage permet de les éliminer de façon rapide et continue. Par contre, des conditions extrêmes doivent pouvoir être prises en compte comme pour le pont à haubans de 1872 mètres de long qui relie désormais la ville de Vladivostok, dans l'Extrême-Orient russe, à l'île Rousski et qui doit subir des conditions climatiques extrêmes.



Figure III.2 : Pont de l'Île Rousski, Vladivostok, Russie.

- **Application au Viaduc de Millau**

Nous pensions qu'il serait facile de calculer le poids d'un pont comme le Viaduc de Millau. Dans nos recherches, nous nous sommes vite aperçus qu'il n'en était rien : le calcul des charges est un travail difficile, confié généralement à un bureau d'étude. Les ingénieurs disposent à l'heure actuelle d'un ensemble d'outils informatiques et expérimentaux leur permettant de dimensionner les ouvrages d'art et l'ensemble des structures en général.

Néanmoins, voici les quelques informations que nous avons pu récolter.

Celles-ci nous ont fourni les charges linéiques pour le tablier P1-P2 . Les charges linéiques sont les charges en kiloNewton par mètre linéaire [kN/ml]. Nous avons considéré ces valeurs comme si elles étaient uniformes tout le long du pont. Nous avons donc simplement multiplié ces valeurs par la valeur de la longueur du viaduc : 2460 m.

Les charges sont constituées des poids propres :

Elément	Charge linéique	Poids estimé
Charpente métallique du tablier	141 kN/ml	2460.141 = 347 MN
Superstructures	80,1 kN/ml	197 MN

On remarque que l'équipement représente une part importante du poids du pont.

Les pylônes et leurs 22 haubans et systèmes d'ancrage apportent une contribution de 8,57 MN chacun. Au total, pour les 7 ensembles pylônes-hauban, cela représente approximativement 60 MN.

Le poids total d'environ 600 MN est supporté par l'ensemble des 7 piles, qui elles-mêmes ajoutent leur propre poids et transmettent tout ces efforts verticaux aux fondations. Par comparaison, le poids estimé de la tour Eiffel est de 101 MN.

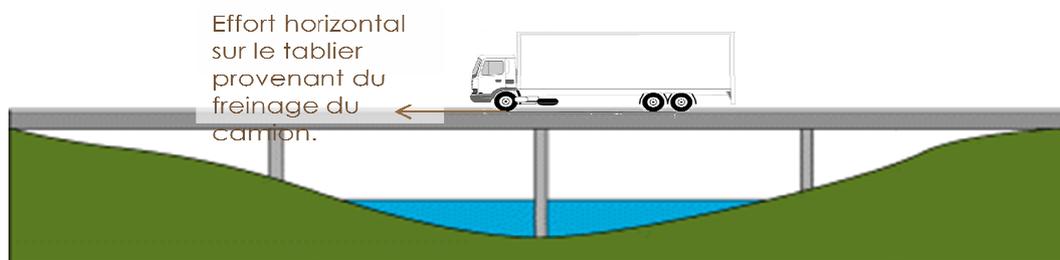
A cela, il convient d'ajouter les charges d'exploitation. Elles sont déterminées à partir des Eurocodes. Les charges de trafic ont des valeurs d'ordre de grandeur commune à l'ensemble des ouvrages de type autoroutiers.

Ceux-ci renseignent pour ce type de pont une charge surfacique de 2,63 kN/m².

La largeur roulable du tablier étant égale à peu près 22 mètres, on prend en compte au plus six voies de 3,50 m de large pour ce pont de première classe. La charge linéique maximale vaut donc $2,63 \cdot 6 \cdot 3,5 = 55,2$ kN/ml. En considérant de nouveau une répartition uniforme, nous avons une charge d'exploitation pour le pont de 136 MN. Ces charges sont habituellement majorées par des coefficients de sécurité renseignés par les normes européennes.

Les chiffres présentés ci-dessus résultent d'un calcul à notre portée, donc forcément simpliste. Nous l'avons déjà signalé, il ne faut pas oublier de prendre en compte les efforts dus aux véhicules en régime dynamique lors du freinage ou de l'accélération de ceux-ci. Ces efforts sont repris par le tablier qui les transmet à ses appuis : piles, câbles, culées... Ces efforts sont beaucoup plus difficiles à évaluer.

Par exemple, un poids lourd usant de ses freins exerce un effort horizontal sur la chaussée.



Ensuite, le poids ne représente qu'une forme de charge. D'autres éléments extérieurs apportent des contraintes supplémentaires.

Vent et séismes font partie des charges dynamiques : elles apparaissent brutalement et provoquent inévitablement des vibrations.

4. Les contraintes environnementales

• Les variations de température

Les variations de température provoquent la dilatation ou le retrait des matériaux. Elles induisent des efforts horizontaux.

En effet, s'il fait très chaud, le pont va avoir tendance à se dilater et si au contraire, il fait froid, il aura tendance à se compresser. L'importance de la dilatation dépend bien entendu des matériaux employés.

On peut calculer cette dilatation grâce à la formule : $\Delta L = \alpha \cdot L_0 \cdot \Delta T$

Où α représente le coefficient de dilation linéaire (en Kelvin⁻¹), L_0 , la longueur initiale (en mètre) et ΔT , la variation de température (en Celsius ou en Kelvin).

Par exemple, le béton et l'acier qui constituent souvent les tabliers possèdent un coefficient de dilatation thermique linéaire similaire $\alpha \approx 10^{-5} \text{K}^{-1}$. Le Viaduc de Millau présente une longueur totale de 2460 m. Sur une année, il n'est pas étonnant de passer d'une valeur extrême de -20 °C à l'autre 35°C. Cela provoque un allongement de 1,35 m, d'où la nécessité de prendre des dispositions constructives de type joints de dilatation.

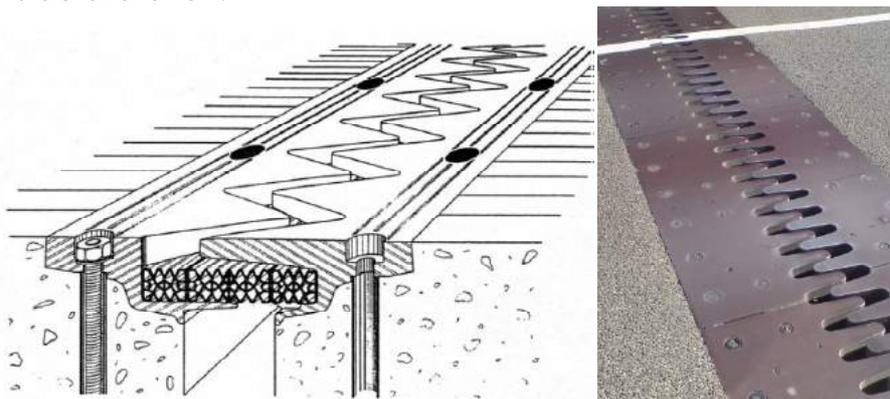


Figure III.3 : Joint de dilatation

Si on empêche un tablier de se dilater (longitudinalement et transversalement), cela induit des contraintes importantes susceptibles de fissurer l'ouvrage. Il est donc nécessaire de laisser ces dilatations se produire librement. On place aux extrémités des tabliers ce qu'on appelle un joint de dilatation en forme de peigne qui permet au pont de s'allonger sans subir de contrainte.

Il faut en plus prévoir que les appareils d'appui puissent soit absorber ces mouvements, soit les laisser libres.

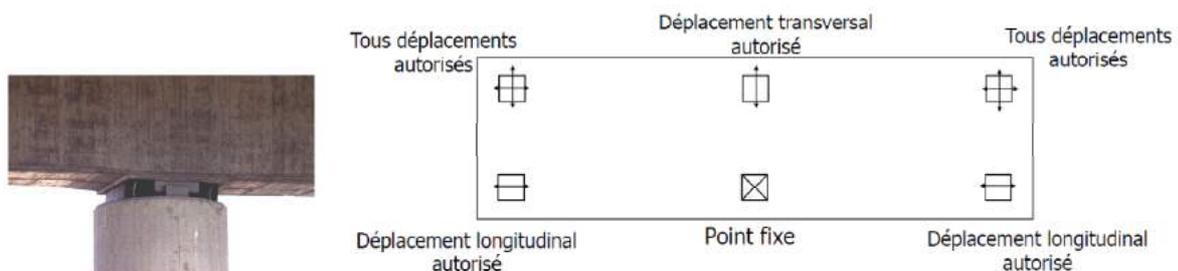


Figure III.4 : les appareils d'appuis doivent laisser la dilatation libre tout en empêchant le déplacement général du tablier.

● Le vent

Une autre contrainte, plus importante encore que les variations de température, c'est l'action du vent. Ce dernier peut faire subir au pont des forces considérables du fait que les ponts d'aujourd'hui sont des structures minces, longues et souples.

Le vent n'agit pas que par sa force, il agit également en suscitant des vibrations. L'exemple ayant frappé tous les esprits est celui du pont de Tacoma Narrows aux États-Unis.

En 1940, ce pont suspendu s'effondre après avoir oscillé de façon impressionnante pendant près de trois quarts d'heure, sous l'effet d'un vent dont la vitesse moyenne était bien inférieure à la valeur limite autorisée. Cet événement majeur a appris beaucoup de choses aux ingénieurs.

Le vent fait intervenir deux types de forces :

- **Des forces de portance** : suscitées par le jeu des pressions et dépressions, agissant perpendiculairement à la surface.
- **Des forces de traînées** : dirigées parallèlement à la surface, dans le même sens que le vent.

Ces phénomènes sont accentués par le fait que le tablier offre une surface portante relativement conséquente au vent. Mais aussi par le fait que le profil du tablier ressemble fortement à l'aile d'un avion.

A l'instar d'une aile d'avion, le tablier subit une force de portance vers le haut et des effets de turbulence associés qui tendent à déséquilibrer l'ouvrage et créer des phénomènes de résonance.

Pour résoudre le problème de la portance, les tabliers sont profilés de telle manière à ressembler à une double aile inversée. L'air ayant une plus grande distance à parcourir sous le tablier, il s'y crée une dépression qui aspire le tablier vers le bas et le stabilise sur les piles.

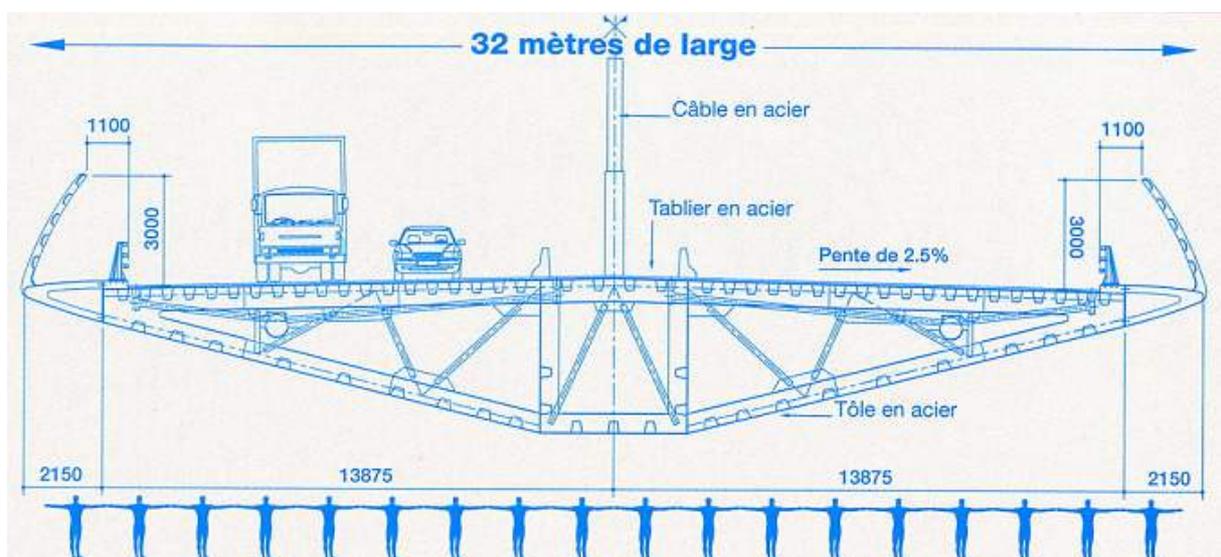


Figure III.5 : Coupe transversale de la travée centrale du Viaduc de Millau. Les sollicitations majeures de l'ouvrage sont incontestablement celles induites par le vent, dont la vitesse de pointe peut atteindre plus de 200 km/h. Il convient donc de disposer d'un tablier présentant un profil aérodynamique optimal.

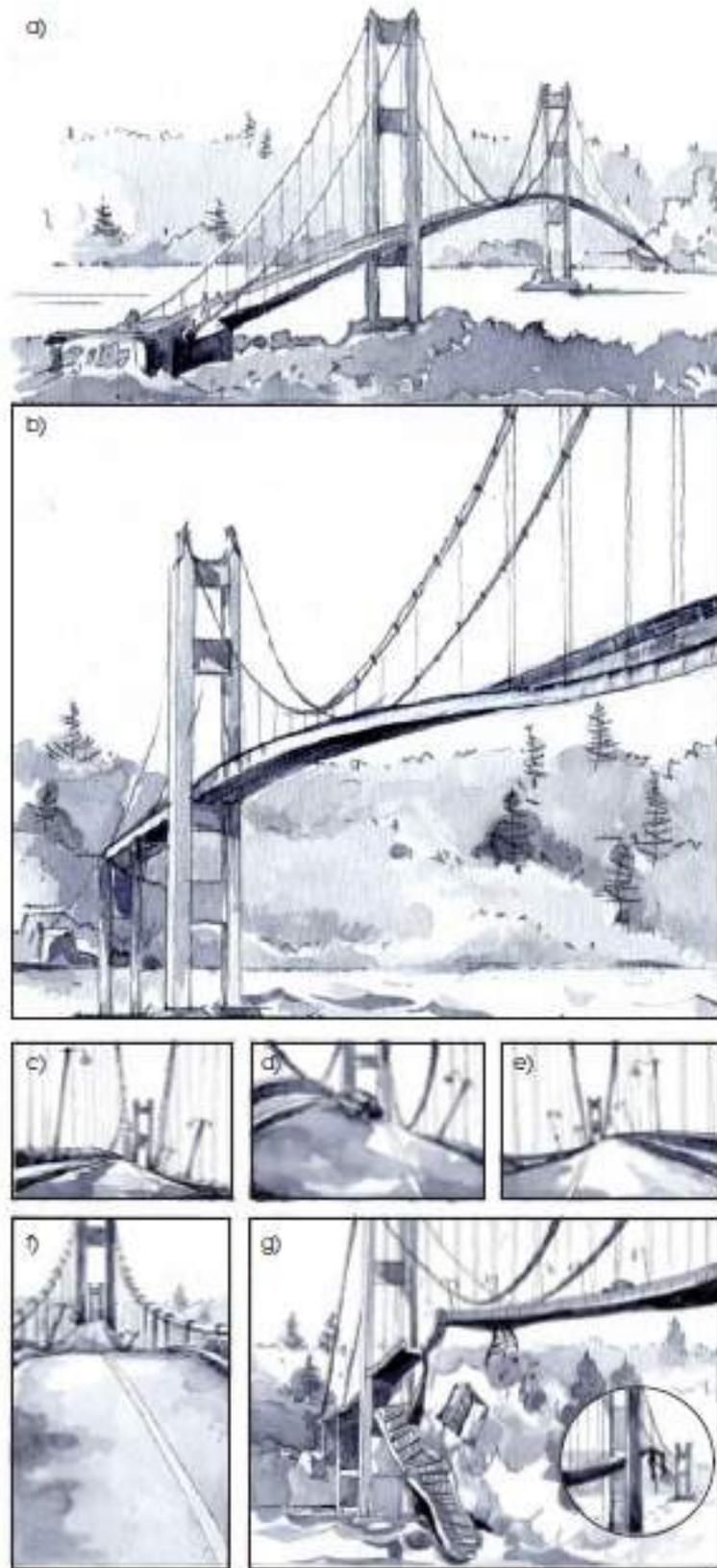


Figure III.6 : Reconstitution de l'accident du pont de Tacoma 1940 aux États-Unis. a) - e) Déformation en torsion menant jusqu'à la ruine f).

L'autre problème lié au vent provient du type d'écoulement autour du tablier. L'air en contact avec la surface forme une « couche limite ». Sur une aile d'avion, l'air s'écoule de façon laminaire, sans turbulence car les profils d'ailes sont très soignés et ne présentent que peu d'imperfections de surface aux vents. La couche limite adhère dans ce cas au solide.

Tandis qu'un pont présente inévitablement des imperfections. Par conséquent, la couche limite se décolle de façon périodique en, créant des tourbillons et un sillage se développe à l'arrière du pont.

En tant que structure souple, le pont peut lui-même effectuer des oscillations verticales, transversales ou des torsions. À chacun de ces types d'oscillations, correspond une fréquence propre. Si le pont oscille à la même fréquence qu'une de ses fréquences propres, il entre en résonance.

Le vent fournissant continuellement de l'énergie à la structure renforce l'oscillation dont l'amplitude augmente jusqu'à la rupture.

En revanche, si les oscillations provoquées par le vent ne sont pas à la fréquence de résonance, les vibrations d'un système ont tendance à s'amenuiser rapidement et finissent par s'amortir.

Les oscillations peuvent provoquer trois sortes de déformations :

- La torsion du tablier ;
- Une flexion verticale due au soulèvement du tablier ;
- Une flexion latérale due au recul du tablier dans le sens du vent.

La technique utilisée pour empêcher que ce phénomène ait lieu est tout simplement l'utilisation de matériaux dont la fréquence de résonance est très élevée, comme l'acier. Ainsi le pont ne court pas le risque d'entrer en résonance. On utilise aussi des matériaux assez lourds, rendant ainsi les vibrations du pont très rares. Par exemple, le pont ne doit pas avoir une fréquence comprise entre 1 et 4 Hertz car celle-ci correspond à la marche des utilisateurs.

Néanmoins, tous ces phénomènes sont très instables, il est difficile d'obtenir des résultats mathématiques sûrs. Donc, un test en soufflerie d'une maquette de la future construction reste indispensable.

Le Viaduc de Millau est un exemple de situation où l'étude des vents était cruciale, que ce soit pendant la construction, le lancement du tablier ou l'exploitation. Dans la vallée où il se trouve, il est fréquent de voir le vent souffler à 200 km/h. Ces vents peuvent causer des déplacements transversaux du tablier de 60 cm et verticaux de 85 cm environ.

On sait que le vent est susceptible de faire "vibrer" le pont. Il a donc fallu mesurer le risque de mise en résonance du viaduc sous l'effet des rafales de vent et une étude poussée des fréquences propres de vibration du viaduc a été entreprise.

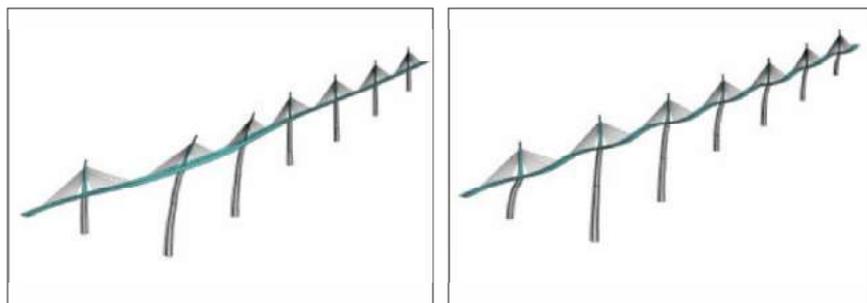


Figure III.7 : Modélisation des modes de vibration du tablier du Viaduc de Millau

● L'activité sismique

Un autre ennemi des ponts, dont l'action présente des similitudes avec celle du vent est l'activité sismique. Tout comme le vent, les tremblements de terre provoquent des oscillations sur le tablier et sur le pont dans son ensemble.

Pour les ponts à faible portée, il est d'usage d'admettre que le mouvement du sol agit simultanément sur tout le pont : la longueur d'onde des vibrations du sol est longue en comparaison avec la longueur du pont. Pour les ponts à longue portée, comme les ponts suspendus ou à haubans, la structure peut être sujette à des mouvements différents à chacune de ses fondations.

Lors de la conception du projet, on effectue une étude sur l'activité sismique du sol basée sur des ressources historiques afin de prendre en compte une longue période. A partir de toutes ces données historiques, on peut déterminer la fréquence et l'importance des événements sismiques.

Des informations nous sont également données par des accélérogrammes : ce sont des graphiques qui représentent l'évolution de l'accélération au cours du temps. L'étude de l'accélérogramme permet d'accéder à la période des oscillations du sol et à leurs amplitudes maximales. On définit ainsi les limites supérieures auxquelles devra résister le pont en cas de séisme.

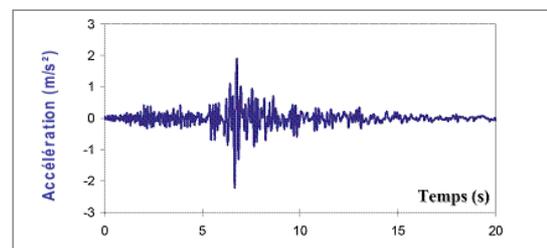


Figure III.8 : Accélérogramme

On synthétise ces données sismologiques connues puis on évalue les paramètres caractéristiques du mouvement sismique au site du pont par des approches probabilistes et déterministes.

La menace d'un tremblement de terre sur le Golden Gate Bridge est permanente. Selon les statisticiens, un tremblement de terre, d'une magnitude que la ville n'a encore jamais connue, devrait se produire dans les trente-cinq années à venir.



Figure III.9 : Golden Gate Bridge, San Francisco, USA

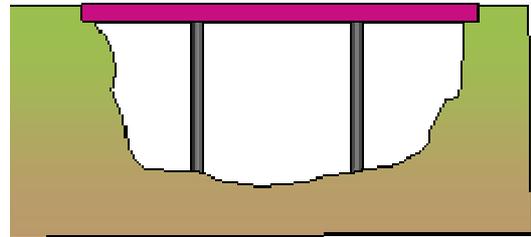
Pour remédier aux vibrations engendrées par l'activité sismique, on utilise deux approches. La première est basée sur la capacité des éléments des structures à résister, à supporter, sous l'effet d'un séisme, des déformations inélastiques sans atteindre la rupture. La seconde approche sur l'équipement de dispositifs spéciaux, tels que des amortisseurs ou des dissipateurs d'énergie, disposés entre la structure portée et la structure porteuse.

IV. Typologie des ponts

La conception des ponts est en constante évolution grâce à l'emploi de matériaux de plus en plus performants, à des moyens de calculs permettant d'établir des modèles de comportement très sophistiqués et à la création de formes originales apportant de nouvelles solutions aux problèmes posés par le franchissement d'obstacles de plus en plus impressionnants.

Aujourd'hui, il existe de nombreux types de ponts adaptés aux conditions environnementales. Ces ponts peuvent être classés suivant les matériaux employés pour leur construction ou selon la nature des réactions produites sur les points d'appuis. C'est ce dernier critère que nous avons choisi d'utiliser pour classer les ponts en quatre catégories.

1. Les ponts à poutre



Le pont à poutre est sans doute celui qui possède la configuration la plus simple : c'est un pont dont le tablier reposant simplement sur des piles est renforcé par une ou plusieurs poutres en bois, en acier, en béton armé ou en béton précontraint. Ces ponts n'exercent que des réactions verticales au niveau des points d'appui.

Ce type de construction a été très utilisé jusqu'au moyen âge car il était facile à construire et peu coûteux par rapport au pont en pierres ou à voûte.

Si sa mise en œuvre est simple et économique, la portée permise est très limitée. En effet, si la travée augmente, le tablier est soumis à une plus grande flexion. On doit alors renforcer celui-ci, ce qui accroît son poids et donc la charge qui engendre le fléchissement. On est alors contraint à multiplier les piles pour réduire les travées et on perd l'avantage économique. Aujourd'hui, les techniques nouvelles de construction limitent cet inconvénient : on emploie des poutres en treillis, ce qui allège la structure et permet des portées plus importantes.

Si autrefois les ponts à poutres étaient essentiellement en bois, aujourd'hui, ils se différencient par la différence du matériau utilisé pour la constitution de la ou des poutres. Celui-ci peut être le bois, le métal, le béton armé, le béton précontraint ou, plus récemment, des matériaux composites.

- Exemples remarquables ou locaux

a) Viaduc de la Gueule, Moresnet, Belgique : pont à poutres métalliques



Figure IV.1

b) Pont-canal du Sart, La Louvière, Belgique : pont à poutres en béton précontraint



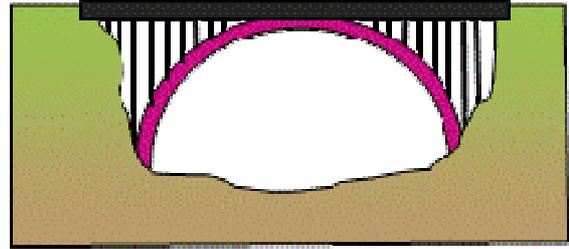
Figure IV.2

c) Pont de l'île de Ré, France : pont à poutres en béton précontraint (long. :2927 m)



Figure IV.3

2. Les ponts en arc

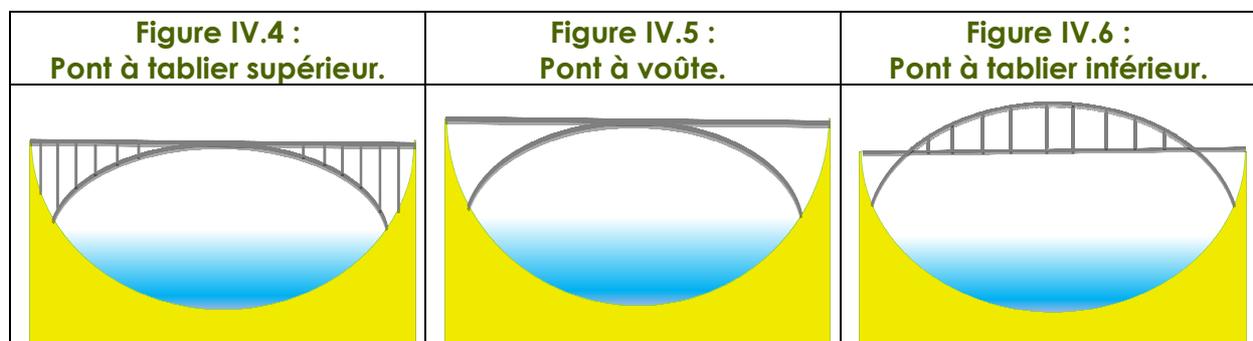


Dans un pont en arc, le tablier du pont est porté par une ou plusieurs arches en bois, en pierre, en acier, en béton armé ou précontraint. Ces ponts exercent sur leurs culées des réactions tendant à les écarter.

Les ponts en arc nous viennent des Romains. Ceux-ci ont révolutionné la manière de construire un pont qui jusque-là se limitait aux pontons ou aux ponts en cordes. Vers le VI^{ème} siècle avant J-C, les romains ont utilisé le bois puis la maçonnerie en taillant la pierre. Pour l'époque, ils étaient très habiles. La forme que les romains donnaient au pont était en demi-cercle et l'édification de plusieurs arches accolées, construites sur le même cintre, permettait le franchissement de larges obstacles. Ensuite, beaucoup plus tard, l'Eglise a remplacé ces formes par des formes elliptiques, de façon à augmenter la portée du pont et ont utilisé des voûtes en arc brisé ou ogive.

Au 19^{ème} siècle, le développement des chemins de fer, la nécessité d'ouvrir de nouvelles voies de communication et le développement de matériaux nouveaux tels l'acier ou le béton sont à l'origine de la construction d'un grand nombre de ponts en arc.

L'arc de ce pont se positionne soit en dessous du tablier (fig. IV.4), pouvant former une voûte (fig. IV.5) si on soustrait les poteaux, soit au-dessus (fig. IV.6).



La possibilité de multiplier le nombre d'arcs permet au pont d'être très long. Par ailleurs, un pont en arc entrave moins les cours d'eau qu'un pont à poutres. La pierre, matériau facilement disponible et durable, a très longtemps été le matériau privilégié dans la construction de ces ponts mais présente l'inconvénient d'une structure très lourde. Les appuis au niveau des culées doivent être solides car ils doivent être capables de s'opposer aux forces de poussée qu'exerce l'arche.

Un autre inconvénient provient du fait qu'il faut dans certains cas une hauteur immense pour que les forces soient correctement réparties et que le pont résiste.

- Exemples remarquables ou locaux

a) Pont du Gard, France : pont à voûtes (1er siècle P.C.N.)



Figure IV.7

b) Pont de la Ravine Fontaine, la Réunion : pont à tablier inférieur (long. :110 m)



Figure IV.8

c) Pont de Chaotianmen, Chine : record du plus grand pont en arc (long. 1741 m)



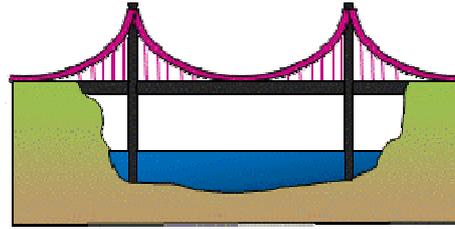
Figure IV.9

d) Pont à béquilles (Pont de Falaise, Normandie, France) : à la limite entre le pont à poutres et le pont en arc



Figure IV.10

3. Les ponts suspendus



Un pont suspendu est un ouvrage métallique dont le tablier est attaché par l'intermédiaire de tiges de suspension verticales appelées suspentes, reliées à un certain nombre de câbles flexibles ou de chaînes dont les extrémités sont ancrées aux culées, sur les berges. Il est rangé dans la famille des ponts à câbles, combinant la traction, la compression et la flexion dans un fonctionnement plus complexe que les précédentes catégories.

On a découvert que les ponts suspendus étaient utilisés depuis déjà très longtemps, vraisemblablement dès le III^{ème} siècle A.C.N. par les Chinois, les Incas et les Indiens. Ils étaient alors fabriqués en cordes et en lianes et permettaient déjà de franchir des brèches de 50 mètres.

Ce type de pont et son histoire sont présentés plus en détails dans la section VII.

L'avantage principal du pont suspendu est qu'il peut enjamber des distances beaucoup plus grandes que tout autre type de pont. Mais il possède inévitablement des inconvénients tels que la nécessité de la présence de massifs d'ancrage imposants et lourds, indispensables pour retenir les forces considérables qui s'exercent ; de ce fait, on le lie fonctionnellement à la géologie du sol qui va le supporter.

De plus, le remplacement des câbles devient un travail très dur et fastidieux demandant plusieurs mois ainsi que la fermeture du pont durant ce délai. Enfin, le pont suspendu est très souple, ce qui pose un problème lorsque la force du vent est plus ou moins identique au mouvement oscillatoire, ce qui l'amplifierait et dégraderait davantage la structure. Un exemple célèbre et malheureux qui a frappé toutes les mémoires est ce fameux pont de Tacoma qui oscilla au gré du vent pour finir par s'écrouler et dont on rappelle l'histoire dans la section III.

- **Exemples remarquables ou locaux**

A notre connaissance, il n'existe pas de pont suspendu en Belgique. Le plus proche est celui de Tancarville en France.

a) Pont de Tancarville, Normandie, France (1959) : longueur de 1420 m



Figure IV.11

b) Pont d'Akashi, Japon (1998) : 3911 m (record de longueur de travée centrale)



Figure IV.12

c) Pont de Brooklyn, New York, USA (1883) : 1825 m



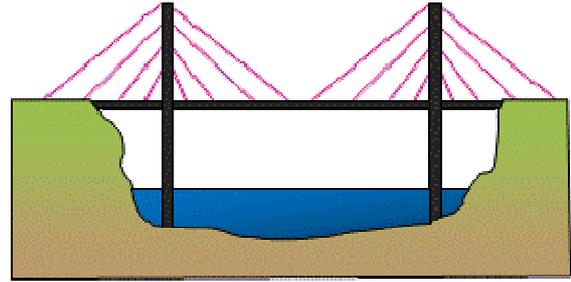
Figure IV.13

d) Pont du Golden Gate, San Francisco, USA (1937) : 2737 m



Figure IV.14

4. Les ponts à haubans



Depuis près de 40 ans, les ponts suspendus s'effacent au profit d'une autre technique, plus légère et plus audacieuse: le pont à haubans.

Le pont à haubans ressemble au pont suspendu. Tous les deux ont des tabliers suspendus à des câbles. Mais alors que le tablier d'un pont suspendu est porté par deux puissants câbles rattachés à chaque pile et ancrés dans la terre ferme aux culées, le tablier d'un pont à haubans est porté grâce à de nombreux câbles obliques attachés aux pylônes du pont, les haubans.

Le premier pont à haubans conçu par l'allemand Immanuel Löscher voit le jour en 1784. Mais c'est seulement à la fin du 19^{ème} siècle qu'il connaît son expansion. Il s'est ensuite développé en Allemagne, après 1945, à l'occasion de la reconstruction des ponts du Rhin et aujourd'hui, est très utilisé à travers le monde.

La section VIII est entièrement consacrée aux ponts à hauban.

Les avantages des ponts à haubans sont nombreux : ils permettent d'enjamber de grandes distances pour un coup moindre que celui des ponts suspendus. En effet, on économise sur l'énorme câble qui supporte l'ensemble du poids de l'ouvrage. C'est donc moins cher à construire. Ensuite, la répartition des forces au niveau des piliers rend inutile la réalisation de massifs d'ancrage dans les berges : on peut construire ce type de pont sur à peu près tout type de terrain.

Un des inconvénients est que les haubans doivent être élevés pour minimiser la traction dans les câbles, ce qui exige de grands pylônes. Par ailleurs, les ponts à haubans, comme les ponts suspendus, sont plus fragiles et plus vulnérables au vent et aux vibrations engendrées par la circulation.

- **Exemples remarquables ou locaux**

- a) Pont du Pays de Liège, Belgique (2000) : longueur de 327 m**



Figure IV.15

- b) Viaduc de Millau, Aveyron, France (2004) : plus long tablier haubané (2 460 m), plus haut ensemble pile/pylône : 343 m, plus haut pont à haubans : tablier à 270 m au-dessus du Tarn



Figure IV.16

- c) Pont Rion-Antirion, Grèce (2004) : longueur de 2883 m, pile avec la plus grande hauteur immergée (63,5 m), plus gros appuis de piles (embase de 90 m de diamètre)



Figure IV.17

- d) Pont de Sutong, Jiangsu, Chine (2008) : longueur de 8146 m, plus haut pylône (300,4 m)



Figure IV.18

- e) Pont Zakim Bunker Hill, Boston, USA (2003) : longueur de 436 m, le plus large (56,39 m)

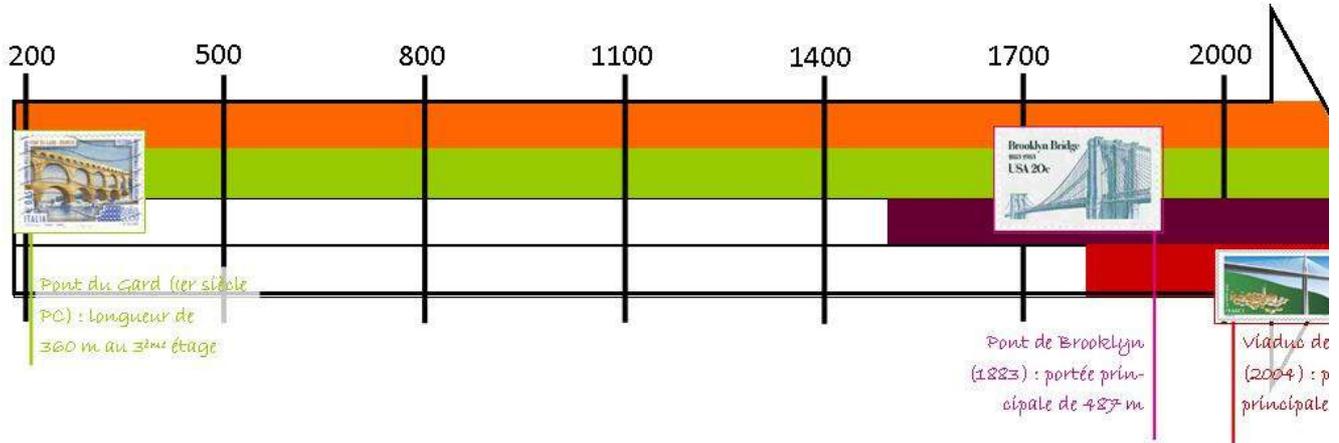


Figure IV.19

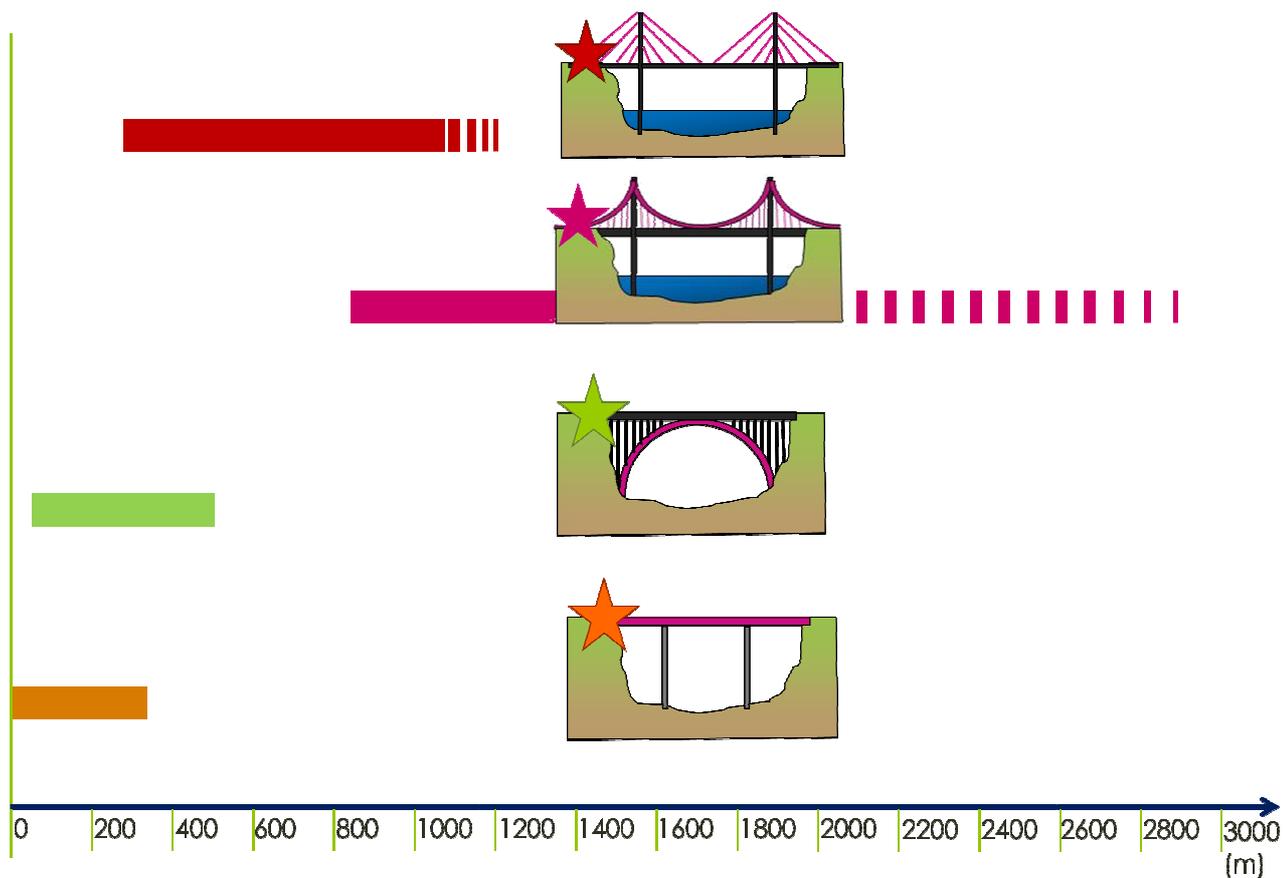
5. Classement des ponts dans le temps et selon les portées

Légende : la couleur référence le type de pont.

• Ligne du temps



• Classement des portées



V. Les matériaux utilisés

Les ponts, ouvrages d'art aériens, sont soumis à de nombreuses contraintes, non seulement d'ordre physique, mais aussi économiques. Pour y faire face, de nouveaux matériaux ont été développés au fil du temps, permettant des ouvrages de plus en plus sophistiqués.

Les matériaux d'une structure peuvent être soumis à différents efforts internes (traction, compression, flexion, cisaillement, torsion) et y réagissent de façons différentes.

1. Autrefois, le bois et la pierre

Le bois a été le matériau le plus utilisé dans l'Antiquité et jusqu'au XVIIe siècle dans la construction des ponts. C'était un matériau très courant, simple à travailler, mais aux caractéristiques mécaniques limitées, sensible aux incendies et aux intempéries.



Figure V.1: Ponte de l'Accademia, Venise, Italie : en bois goudronné et destiné à n'être que temporaire, il fut construit en 1934 et reconstruit à l'identique dans les années quatre vingt.

Pour des ouvrages plus importants et durables, la pierre et la maçonnerie lui furent préférées jusqu'à la fin du XIXe siècle. Les matériaux utilisés ne permettaient pas de grandes distances entre appuis : l'utilisation de la pierre permit de construire des travées de l'ordre de 50 mètres pour les ponts les plus modernes.

De nos jours, les ponts sont principalement constitués de deux matériaux, à savoir : le béton et l'acier. Ils ont tous deux des spécificités qui permettent de résister à des forces et des conditionnements différents et complémentaires.

2. Le béton

Commençons par le béton. Il fut inventé et utilisé pour la première fois par les romains, qui l'appelaient 'pouzzolane'. Il fut ensuite abandonné pendant des siècles, avant d'être massivement réutilisé depuis les années 1800.

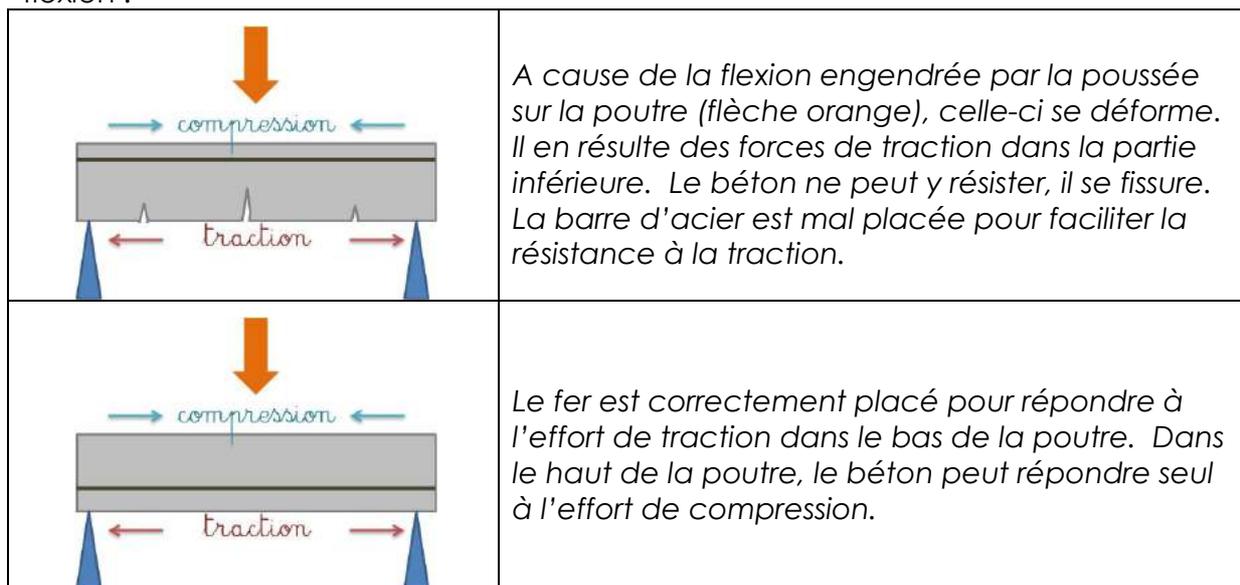
Un des gros avantages du béton, est qu'il est d'abord fluide, prenant la forme que l'on souhaite, avant de se solidifier. Ce matériau offre également de bonnes capacités à la compression et un bon comportement dans le temps sans entretien lourd. De plus, la matière première pour le produire se trouve partout.

Cependant, s'il résiste bien à la compression, il est très fragile quand il s'agit de forces de flexion ou de traction, ce qui limite les performances des ouvrages.

Pour combler ce manque, on peut l'employer dans les structures des appuis, afin de n'obtenir que des efforts de compression.

Une autre solution consiste à l'associer à des barres d'acier. Celles-ci ont à peu près le même coefficient de dilatation que le béton, et sont alors incorporées dedans. On parle dans ce cas de béton armé. Les ferrailles doivent être placées là où la traction se produit : dans la partie inférieure de la poutre.

Voici par exemple, ce qui se produit quand une poutre doit résister à un effort de flexion :



Les performances du béton armé permirent d'atteindre des portées de l'ordre de 100 mètres (120 mètres pour le pont de la Tournelle à Paris).

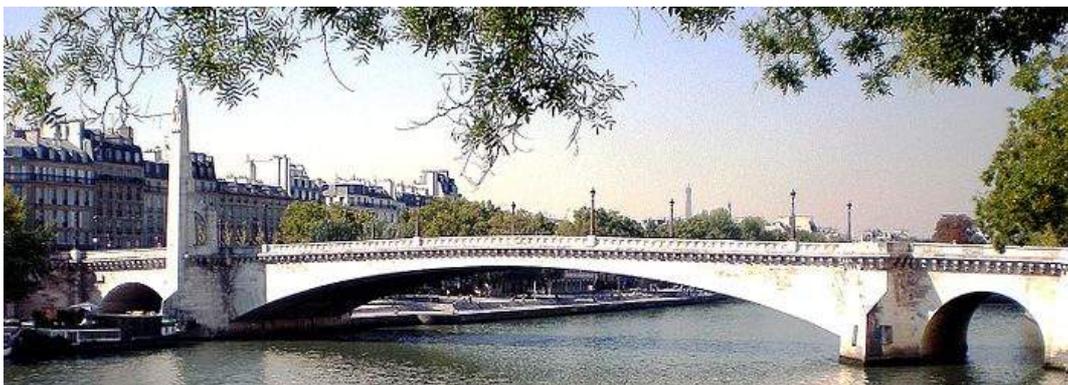


Figure V.2: Pont de la Tournelle, Paris, France

Un des problèmes majeurs du béton armé est que, lorsque l'ensemble est soumis à de fortes tractions, l'acier s'étire, mais le béton se fissure.

Un certain Eugène Freyssinet, célèbre constructeur français du XIX^{ème} siècle, eut une idée de génie en 1928. Puisque le béton résiste mal à la traction mais résiste bien à la compression, il imagina de le comprimer préalablement suffisamment pour qu'en tous points les compressions soient supérieures aux tractions qui se développent lorsque la poutre est sollicitée. C'est à lui que l'on doit donc le fameux béton précontraint qui révolutionna l'art de construire.

Plusieurs procédés permettent d'obtenir un béton précontraint. On peut par exemple procéder par prétension : les fils d'acier sont tendus avant le coulage du béton dans le coffre. Lorsque le béton est suffisamment durci, on relâche les fils d'acier qui transmettent leur tension au béton.

L'usage du béton précontraint permet d'utiliser les caractéristiques du béton au mieux, ce qui amène des structures plus légères en diminuant les sections nécessaires, par là-même réduisant considérablement l'armature en métal nécessaire, et donc d'autant les coûts de fabrication. Son invention permit la construction de ponts plus longs et plus résistants.

D'autre part, par la facilité de mise en œuvre et la liberté des formes possibles, on a pu réaliser des ouvrages d'arts dans des zones géographiques difficiles comme pour le Viaduc de Nantua en France.



Figure V.3: Viaduc de Nantua, France

3. L'acier

Poursuivons avec l'acier. Celui-ci fut créé en 1786 par trois savants français, Berthollet, Monge et Vandermonde. Au XIX^{ème} siècle, sa production se développa de façon spectaculaire ce qui permit le développement de possibilités architecturales comme les ponts suspendus.

L'acier est en fait un alliage, constitué de fer et de carbone.

Son avantage principal est sans doute de pouvoir résister, à l'inverse du béton, à des forces de tension très élevées. Cette capacité est donc extrêmement intéressante dans le contexte de ponts suspendus, pour soutenir le tablier, entre autres. D'autre part, les moyens de protection de l'acier contre la corrosion ont beaucoup évolué ce qui permet d'obtenir des ouvrages durables sans avoir à mettre en œuvre une maintenance lourde.



FigureV.4 : Astoria-Megler Bridge, Oregon, USA : Pont à poutres cantilever en treillis

Mais l'acier présente aussi des inconvénients : fragilité aux basses températures, prédisposition à la fatigue.

L'acier est en outre un matériau élastique. Cependant, si on l'étire au-delà de ses capacités, il ne reprend plus sa forme initiale, et puis finit par casser.

De nos jours, l'acier est très bien maîtrisé et il existe beaucoup de types d'acier différents, propres à satisfaire les besoins des constructeurs. Le critère les différenciant est leur limite d'élasticité.

Le plus populaire est sans doute l'acier T1, américain. C'est un des plus résistants. De plus, il est soudable, bien plus résistant à la corrosion que l'acier doux et supporte des basses températures qui rendent les autres aciers fragiles au choc. Le seul obstacle à son emploi à très grande échelle est son prix : des aciers intermédiaires, moins résistants et donc moins chers sont donc la solution la plus souvent employée.

Voilà ce qu'il en est pour ces deux matériaux, les plus utilisés à l'heure actuelle.

La conception actuelle des ponts combine leurs avantages dans des structures mixtes : les appuis sont le plus souvent en béton armé, ou précontraint. Le tablier est en acier, suspendu par des câbles en acier également.

Tableau des résistances des matériaux

	Dureté	Résistance mécanique			Déformation plastique	Utilisation
		Flexion	Compression	Traction		
Acier	****	****	***	****	****	Câbles et tablier
Béton	***	*	****	*	*	Pylônes et piles

**** = Excellent ***= Bon, **= Médiocre, *= Mauvais.

Dans le futur, on peut imaginer que d'autres matériaux les remplacent. L'aluminium, par exemple, est un matériau beaucoup plus léger que l'acier. Bien que toujours élevé, son prix est en baisse. Les innovations dans la recherche sur les polymères pourraient aussi apporter leur lot de nouveautés dans les années à venir, en matière de revêtements, surtout.

VI. Le pont himalayen ou chaînette



1. Introduction



Un des ponts des plus simples et des plus connus des randonneurs est sans doute le pont Himalayen. Il s'agit d'un ouvrage souple, suspendu par ses deux extrémités et qui pend librement à la façon d'une chaîne ou d'un collier. Mais derrière son apparente simplicité, ce pont cache une courbe bien connue des mathématiciens : la bien dénommée *chaînette*.

Figure VI.1 : Passerelle himalayenne du Drac (France)

Galilée pensait qu'il s'agissait d'une parabole, à cause de son allure proche de l'arc de parabole mais nous allons démontrer qu'il n'en est rien.

Nous allons donc tenter d'approcher l'équation mathématique de la courbe formée par un tel pont avec les moyens dont nous disposons actuellement à notre niveau de connaissances mathématiques.

Pour simplifier le problème, nous allons assimiler notre pont himalayen à une chaîne de masse uniforme, de longueur ℓ dont les extrémités se situent à une même hauteur, écartées d'une distance e (fig. VI.2).



Figure VI.2

2. Représentation des forces en présence

Pour comprendre notre problème, on ne va s'intéresser qu'à un morceau infinitésimal de la chaîne, de longueur $d\ell$, compris entre les abscisses x et $x+dx$. Commençons donc par représenter les forces s'appliquant sur ce morceau de chaîne $d\ell$.

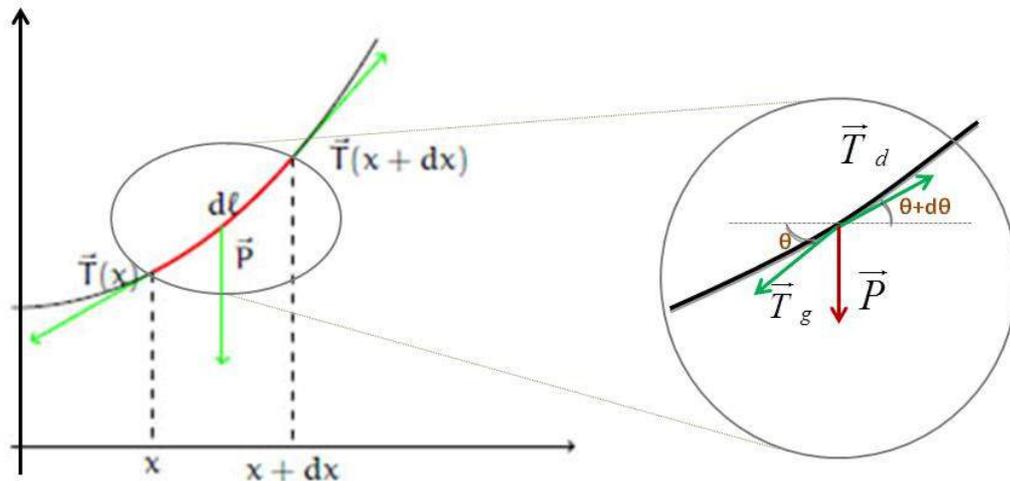


Figure VI.3

Trois forces agissent sur le morceau de chaîne:

1. \vec{P} , son poids, force verticale proportionnelle à la masse du morceau.

Ses coordonnées dans le repère cartésien représenté sont $\begin{pmatrix} 0 \\ -\lambda g d\ell \end{pmatrix}$, où λ et g représentent respectivement la masse linéique de la chaîne (= masse par unité de longueur, en [kg/m]) et la constante de pesanteur ;

2. $\vec{T}(x) = \vec{T}_g$, la tension à gauche.

Elle s'applique tangentiellement à la chaîne au point d'abscisse x . Ses coordonnées dans le repère cartésien sont $\begin{pmatrix} T \cos(\theta+180^\circ) \\ T \sin(\theta+180^\circ) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -T \cos \theta \\ -T \sin \theta \end{pmatrix}$, θ étant l'angle aigu entre l'horizontale et la tangente à la chaîne au point d'abscisse x .

3. $\vec{T}(x+dx) = \vec{T}_d$, la tension à droite.

Elle s'applique tangentiellement à la chaîne au point d'abscisse $x+dx$. Ses coordonnées dans le repère cartésien sont $\begin{pmatrix} (T+dT) \cos(\theta+d\theta) \\ (T+dT) \sin(\theta+d\theta) \end{pmatrix}$.

Le poids, les tensions à gauche et à droite, ainsi que la longueur infinitésimale de chaîne varient en fonction de x . Par contre, dx reste constant.

3. La composante horizontale des tensions est constante

Pour nous aider dans la suite de nos calculs, nous commençons par montrer que la composante horizontale des tensions, notée T_x , est constante :

$$T_x = T \cos \theta = \text{constant e}$$

La chaîne étant en équilibre, nous pouvons appliquer le principe d'inertie de Newton qui stipule que la résultante des forces agissant sur un corps à l'équilibre est nulle :

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0}$$

Ce qui se traduit dans le cas de l'élément de chaîne par :

$$\begin{pmatrix} -T \cos \theta \\ -T \sin \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (T + dT) \cos(\theta + d\theta) \\ (T + dT) \sin(\theta + d\theta) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\lambda g d\ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui revient au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} -T \cos \theta + (T + dT) \cos(\theta + d\theta) = 0 & (VI.1) \\ -T \sin \theta + (T + dT) \sin(\theta + d\theta) - \lambda g d\ell = 0 & (VI.2) \end{cases}$$

Considérons l'équation (VI.1) :

$$-T \cos \theta + (T + dT) \cos(\theta + d\theta) = 0$$

En développant cette expression, elle devient :

$$-T \cos \theta + [(T + dT)(\cos \theta \cos d\theta - \sin \theta \sin d\theta)] = 0$$

En utilisant les approximations $\cos d\theta \approx \cos 0 \approx 1$ et $\sin d\theta \approx d\theta$, nous pouvons la simplifier de la sorte :

$$-T \cos \theta + [(T + dT)(\cos \theta - \sin \theta d\theta)] = 0$$

Effectuons :

$$-T \cos \theta + T \cos \theta - T \sin \theta d\theta + dT \cos \theta - \sin \theta d\theta dT = 0$$

Les deux premiers termes s'annulent. Par ailleurs, si on néglige le terme $\sin \theta d\theta dT$ de deuxième degré, on obtient :

$$-T \sin \theta d\theta + dT \cos \theta = 0$$

Ou encore

$$d(T \cos \theta) = dT_x = 0$$

Donc,

$$T \cos \theta = T_x = \text{constante}$$

Nous avons donc démontré que la tension horizontale était constante, mais qu'en est-il de la tension verticale ?

4. Expression de la tension verticale

Afin d'observer comment évolue la tension verticale, nous partons de l'équation (VI.2) du principe d'inertie :

$$-T \sin \theta + (T + dT) \sin (\theta + d\theta) - \lambda g d\ell = 0$$

Appliquons la formule d'addition du sinus et distribuons la parenthèse :

$$-T \sin \theta + T(\sin \theta \cos d\theta + \sin d\theta \cos \theta) + dT(\sin \theta \cos d\theta + \sin d\theta \cos \theta) - \lambda g d\ell = 0$$

Mettons de l'ordre grâce aux approximations $\cos d\theta \approx \cos 0 \approx 1$ et $\sin d\theta \approx d\theta$:

$$-T \sin \theta + T \sin \theta + T \cos \theta d\theta + \sin \theta dT + \cos \theta dT d\theta - \lambda g d\ell = 0$$

Deux des termes de notre équation s'annulent tandis qu'un troisième est de second ordre et donc négligeable. On a donc désormais l'équation suivante :

$$d(T \sin \theta) = \lambda g d\ell \quad (\text{VI.3})$$

Or, si $\theta \neq \frac{\pi}{2}$, $T_x = T \cos \theta \Leftrightarrow T = \frac{T_x}{\cos \theta}$

En remplaçant T dans l'équation (VI.3):

$$d\left(\frac{T_x}{\cos \theta} \cdot \sin \theta\right) = \lambda g d\ell$$

Ou
$$d(T_x \tan \theta) = \lambda g d\ell \quad (\text{VI.4})$$

Si nous notons $y(x)$ l'équation de la courbe de la chaîne,

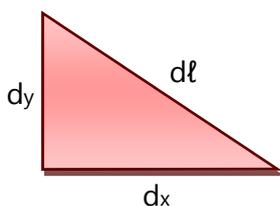
— D'une part, on peut exprimer $\tan \theta$ en fonction de dx et dy.

$$\tan \theta = \frac{dy}{dx} = y'(x)$$

— Nous pouvons d'autre part exprimer $d\ell$ en fonction de dx et dy.

En effet, chaque morceau infinitésimal de chaîne peut être considéré comme rectiligne.

On peut considérer que nous sommes dans un triangle rectangle où on connaît 2 côtés (dx et dy), et donc appliquer le théorème de Pythagore qui nous permet d'arriver à la relation suivante :



$$d\ell = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

En remplaçant $d\ell$ et $\tan\theta$ dans (VI.4), nous obtenons :

$$d\left(T_x\left(\frac{dy}{dx}\right)\right) = \lambda g \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

Ce qui équivaut à :

$$d\left(T_x\left(\frac{dy}{dx}\right)\right) = \lambda g dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Ou encore :

$$\frac{d}{dx}\left(T_x\left(\frac{dy}{dx}\right)\right) = \lambda g \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

Or, nous avons montré que la tension horizontale T_x est constante. On a donc en réalité :

$$T_x \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \lambda g \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

On peut noter $\frac{dy}{dx} = y'$ et $\frac{d^2y}{dx^2} = y''$:

$$T_x \cdot y'' = \lambda g \sqrt{1 + y'^2}$$

On isole y''

$$y'' = \frac{\lambda g}{T_x} \sqrt{1 + y'^2} \quad (\text{VI.5})$$

On obtient ce qu'on appelle une **équation différentielle**. La solution de cette équation est une fonction $y(x)$ qui vérifie à la fois l'équation et les conditions initiales du problème (comme l'écartement et la longueur totale). C'est cette fonction qui détermine la forme du câble.

5. Résolution de l'équation différentielle

Posons maintenant $g=y'$ et $k = \frac{\lambda g}{T_x}$, on a alors l'équation différentielle suivante à résoudre:

$$g' = k\sqrt{1 + g^2}$$

Grace à nos connaissances en analyse, la forme de la dérivée a tout pour nous laisser penser qu'il s'agirait d'une fonction hyperbolique.

$$g(x) = sh(kx) + C_1$$

Où C_1 est une constante.

Puisque dans ce cas : $g'(x) = (sh(kx) + C_1)' = kch(kx)$

Et que $ch^2(kx) - sh^2(kx) = 1 \Leftrightarrow ch^2(kx) = 1 + sh^2(kx)$

$$g'(x) = k\sqrt{sh^2(kx) + 1}$$

Il faut trouver la constante d'intégration C_1 .

Si on utilise un repère dans lequel le point le plus bas de la chaîne a pour coordonnées $(0, a)$, la fonction g doit vérifier :

$$y'(0) = g(0) = 0$$

Cela impose $C_1 = 0$

On obtient une nouvelle équation différentielle du premier ordre :

$$y'(x) = sh(kx)$$

Qui a pour solution

$$y(x) = \frac{1}{k}ch(kx) + C_2$$

La condition $y=a$ si $x=0$ donne une valeur nulle pour C_2 si $a = \frac{1}{k}$.

Nous obtenons ainsi **l'équation de la chaînette** recherchée :

$$y = a \operatorname{ch}\left(\frac{x}{a}\right) \quad (\text{VI.6})$$

$$\text{Avec } a = \frac{1}{k} = \frac{T_x}{\lambda g}$$

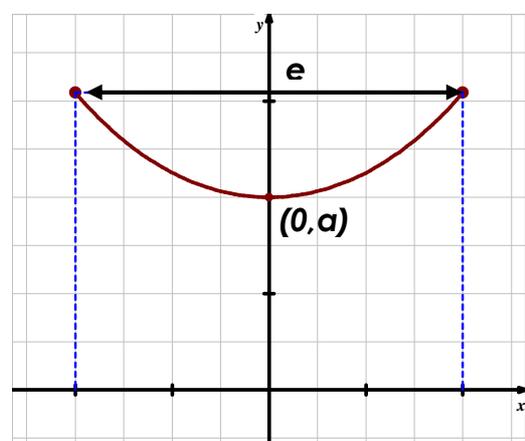


Figure VI.4

La chaînette est une courbe que l'on observe tous les jours, et pas seulement lors de randonnées en montagne : c'est le collier qui pend à votre cou, le fil électrique entre deux pylônes, ou encore le câble d'un téléphérique.



Figure VI.5 :
Sagrada Familia
Barcelone (Espagne)



Figure VI.6 : Gateway Arch
ST Louis (USA)



Figure VI.7
Vélaire

Son étude a passionné dès le XVII^{ème} siècle des mathématiciens de renom tels Bernoulli, Leibnitz et Huygens, lequel lui attribua le nom latin de catenaria.

La courbe possède des applications renversées et renversantes ! Les architectes savent bien qu'une voûte formée de pierres jointives tenant par leur propre poids, pour adopter la forme la plus stable, doit prendre aussi une forme de chaînette renversée. Ainsi, Gaudi n'a pu réussir son pari architectural qu'en employant cette courbe dans la fameuse Sagrada Familia (fig. VI.5), cathédrale des plus élancées et des plus solides jamais construites. On retrouve également la chaînette dans la "Gateway Arch" (fig. VI. 6) à St Louis dans le Missouri.

La chaînette est aussi le profil d'une voile rectangulaire attachée à 2 mâts horizontaux, enflée par un vent soufflant perpendiculairement à ceux-ci, en négligeant le poids propre de la voile par rapport à la force du vent, d'où le nom de "vélaire" (fig. VI. 7) donné par Jacques Bernoulli.

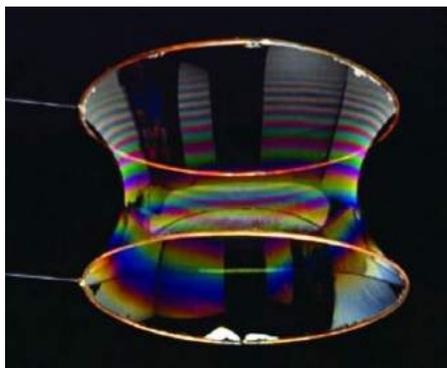


Figure VI.8 : Caténoïde

Pour finir vous pouvez observer des chaînettes avec des bulles de savon : trempez deux cercles métalliques parallèles dans de l'eau savonneuse. Il en sort une surface de révolution appelée caténoïde. Le caténoïde est la surface de révolution engendrée par la rotation d'une chaînette autour de sa base. C'est la surface minimale ayant pour frontière deux cercles parallèles, de même rayon, de centres O et O' tels

que la droite (OO') soit perpendiculaire aux plans des cercles.

Elle a pour équation paramétrique :

$$\varphi \in \mathbb{R}; \theta \in [0, 2\pi[: \begin{cases} x = ch\varphi \cos \theta \\ y = ch\varphi \sin \theta \\ z = \varphi \end{cases}$$

Ce qui donne l'équation cartésienne :

$$x^2 + y^2 = ch^2 z$$

6. Calcul de la longueur du câble

Avec l'équation de la courbe représentant le pont himalayen, nous pouvons déterminer la longueur ℓ du câble qui pend librement, entre deux points situés à la même hauteur.

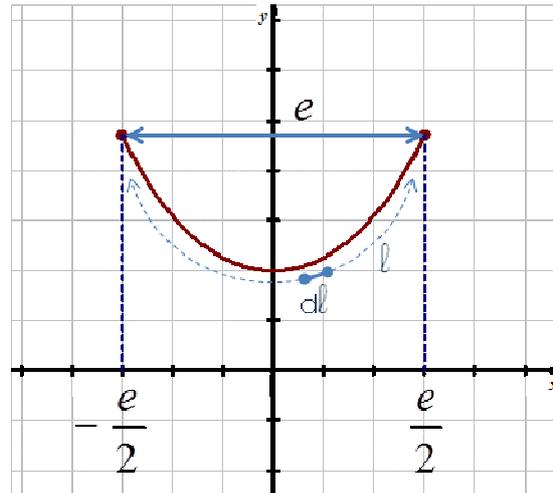


Figure VI.9

Nous savons désormais comment calculer un bout de longueur infinitésimal $d\ell$:

$$d\ell = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

Maintenant nous pouvons calculer la longueur totale de la chaîne, en y appliquant la notion d'intégrale et en notant e l'écartement entre les extrémités.

$$\ell = \int_{-e/2}^{e/2} d\ell = \int_{-e/2}^{e/2} \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

Ce qui revient à

$$\ell = \int_{-e/2}^{e/2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

Or, nous savons que $\frac{dy}{dx} = y'$, ce qui donne

$$\ell = \int_{-e/2}^{e/2} \sqrt{1 + y'^2} dx$$

Ou

$$\ell = \int_{-e/2}^{e/2} \sqrt{1 + \left(ach \frac{x}{a}\right)^2} dx$$

Soit

$$\ell = \int_{-e/2}^{e/2} \sqrt{1 + sh^2\left(\frac{x}{a}\right)} dx$$

Grace à la propriété $ch^2 \alpha - sh^2 \alpha = 1$, notre expression devient

$$\ell = \int_{-e/2}^{e/2} \sqrt{ch^2\left(\frac{x}{a}\right)} dx$$

Comme le cosinus hyperbolique est toujours positif, nous avons

$$\ell = \int_{-e/2}^{e/2} ch\left(\frac{x}{a}\right) dx$$

Intégrons

$$\ell = \left[a \cdot sh \frac{x}{a} \right]_{-e/2}^{e/2} = 2a \cdot sh \frac{e}{2a} \quad (VI.7)$$

Avec $a = \frac{T_x}{\lambda g}$, la longueur d'un câble qui pend librement est donc

$$\ell = \frac{2T_x}{\lambda g} \cdot sh \frac{e \lambda g}{2T_x}$$

La tension horizontale T_x dépend donc de la longueur du câble et de son écartement. Nous allons chercher à exprimer cette tension en fonction de ces deux paramètres.

7. Etude de la tension dans le câble

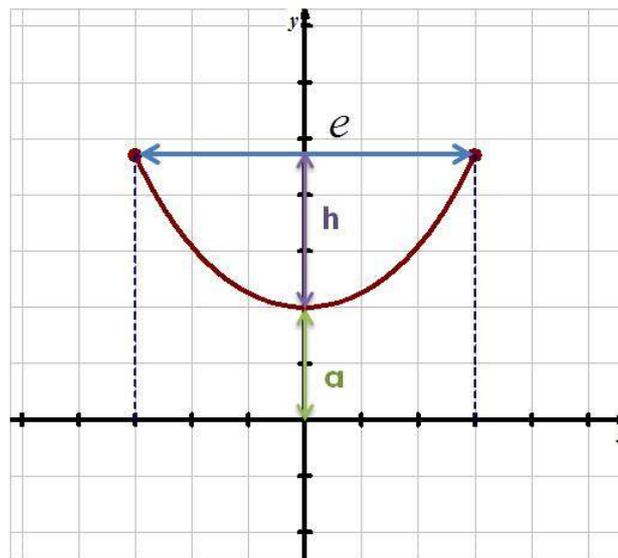


Figure VI.10

• Etude du paramètre a

Commençons par exprimer a en fonction de h , la hauteur entre les deux points d'accroche au même niveau et le point le plus bas, qui est directement liée à la longueur du câble et à son écartement.

De l'équation de la chaînette (VI. 6), en remplaçant x par $\frac{e}{2}$, nous obtenons l'égalité suivante :

$$a + h = a \cdot ch \frac{e}{2a} \quad (VI.8)$$

Appliquant la propriété $\cosh^2 \alpha - \sinh^2 \alpha = 1$ aux relations (VI.7) et (VI.8), on obtient

$$(a+h)^2 - \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \left(a \cosh \frac{e}{2a}\right)^2 - \left(a \sinh \frac{e}{2a}\right)^2 = a^2$$

Ce qui revient à

$$a^2 + h^2 + 2ah - \frac{\ell^2}{4} = a^2$$

Isolons a

$$a = \frac{\ell^2 - 4h^2}{8h}$$

• Expression des tensions

Cherchons à présent à exprimer les tensions qui s'exercent dans une chaînette en fonction des paramètres a , h et ℓ .

Par définition du paramètre a :

$$T_x = a\lambda g \quad (\text{VI.9})$$

Par ailleurs, nous avons déjà trouvé précédemment :

$$T_y = T \sin \theta = T_x \tan \theta = T_x \frac{dy}{dx} = T_x y'$$

En substituant y'

$$T_y = T_x \sinh \frac{x}{a}$$

En remplaçant la tension horizontale par l'expression (VI.9) trouvée auparavant :

$$T_y = a\lambda g \sinh \frac{x}{a} \quad (\text{VI.10})$$

Pour finalement trouver la tension totale (T) :

$$T = \sqrt{T_x^2 + T_y^2} = \sqrt{(a\lambda g)^2 + \left(a\lambda g \sinh \left(\frac{x}{a}\right)\right)^2} = a\lambda g \cosh \frac{x}{a}$$

On voit bien que la tension augmente du point le plus bas du câble vers les points d'ancrage, pour avoir la valeur maximale à ceux-ci :

$$T_{\max} = a\lambda g \cosh \frac{e}{2a} \quad (\text{VI.11})$$

- **Pourquoi les ponts himalayens ne sont-ils pas rectilignes ?**

En tendant fortement les câbles soutenant le pont, il serait possible que la courbe du pont se confonde avec une droite.

Dans ce cas, longueur du câble et écartement prennent des valeurs identiques :

$$\ell \approx e$$

Que devient le paramètre a dans ce cas ?

Nous avons
$$\ell = 2a \cdot \text{sh} \frac{e}{2a} \approx e$$

Ce qui revient à écrire l'équation
$$\text{sh} \frac{e}{2a} \approx \frac{e}{2a}$$

Or, l'équation $x = \text{sh}x$ n'admet que la solution unique $x=0$.

Ce qui implique
$$\frac{e}{2a} \approx 0$$

L'écartement e étant un paramètre fixé par l'environnement, il ne peut être nul. Pour que l'expression soit nulle, il faut que a tende vers une valeur infinie.

$$\frac{e}{2a} \rightarrow 0 \Rightarrow a \rightarrow +\infty$$

Que devient la tension dans ce cas ?

$$T = a \lambda g c h \frac{x}{a} \rightarrow +\infty$$

Les câbles suspendus ne prennent jamais la forme d'une droite tout simplement pour réduire la tension exercée aux extrémités et éviter de faire céder le pont.

- **Optimisation de la tension au point d'ancrage**

Nous allons chercher le paramètre a qui minimisera la tension dans le câble de la chaînette de longueur ℓ donnée. Pour ce faire, nous dérivons l'expression de la tension maximale (au point d'ancrage) par rapport à a :

$$\frac{dT_{\max}}{da} = \lambda g \left(ch \frac{e}{2a} - \frac{e}{2a} \text{sh} \frac{e}{2a} \right) \quad (\text{VI.12})$$

Nous devons résoudre
$$\frac{dT_{\max}}{da} = 0$$

Pour simplifier la recherche de la racine de (VI.12), nous utilisons une variable intermédiaire : $t = \frac{e}{2a}$.

La fonction $f(t) = cht - t \text{sh}t$ possède une racine positive, que nous nommerons α .

En effet, nous pouvons situer approximativement la racine avec les graphes de Chx et $xShx$.

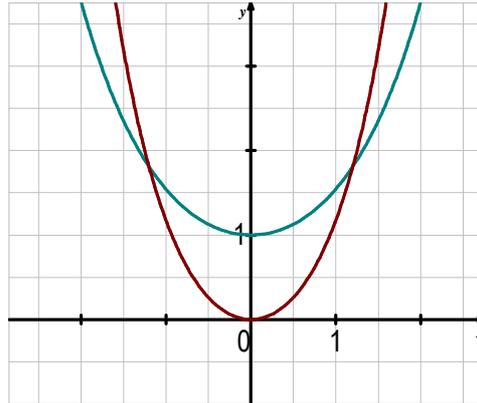


Figure VI.11 : En rouge le graphe de $xshx$ et en bleu celui de chx

Le graphe montre qu'il existe une racine positive entre 1 et 2.

Pour démontrer l'existence de la racine, nous utilisons un cas particulier du théorème des valeurs intermédiaires, connu sous le nom de *Théorème de Bolzano*:

« Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue. Si $f(a)$ et $f(b)$ ne sont pas de même signe, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = 0$. »

Or, $f(t)$ est une fonction partout continue. De plus,

$$f(1) = ch1 - 1.sh1 \approx 0.37 > 0 \text{ et } f(2) = ch2 - 2.sh2 \approx -3.49 < 0$$

Il existe une racine entre 1 et 2. De plus cette racine est unique.

En effet, $f'(t) = -tcht$ est strictement négative sur \mathbb{R}_0^+ . La fonction définie par $f(t) = cht - tsht$ est par conséquent strictement décroissante sur \mathbb{R}_0^+ .

Nous pouvons approcher la valeur de la racine positive par une méthode numérique de recherche de racine. Nous avons opté pour la dichotomie qui nous renseigne la valeur approchée à 10^{-3} de 1,199.

Pour que la tension soit minimale dans le câble de la chaînette, il faut que :

$$\alpha = \frac{e}{2a} \approx 1.199$$

Ce qui revient à exprimer a en fonction de l'écartement donné :

$$a = \frac{e}{2\alpha} \Leftrightarrow a \approx 0.417e$$

• Calcul de la longueur pour la tension minimale

Nous allons pouvoir calculer la longueur à donner au câble pour minimiser la tension au point d'ancrage.

La longueur du câble ℓ est donnée par $\ell = 2a.sh \frac{e}{2a}$ (vu précédemment)

La longueur optimale du câble pour une tension minimale est donc :

$$\ell = \frac{e}{\alpha}.sh\alpha \approx 1.257e$$

- **Calcul de la flèche pour la tension minimale**

On a vu précédemment que :

$$a + h = a \cdot ch \frac{e}{2a}$$

En isolant h :

$$h = a \cdot \left(ch \frac{e}{2a} - 1 \right)$$

Nous pouvons calculer la flèche optimale h , qui dépend de l'écartement :

$$h = \frac{e}{2\alpha} \cdot (ch\alpha - 1)$$

Or $\alpha \approx 1.199$, donc

$$h \approx 0.337e$$

Pour minimiser la tension, la flèche h doit être approximativement égale au tiers de la distance entre les points d'appui, s'ils sont à la même altitude.

Bien entendu, dans la pratique, dans le cas d'un pont himalayen, ce serait presque impossible puisque cela imposerait au voyageur des pentes vertigineuses ! La flèche est donc rarement aussi importante.

Les constructeurs veillent simplement à ce que la tension reste à un niveau raisonnable. Dans les faits, on ne dépasse qu'exceptionnellement une flèche de l'ordre du dixième de la distance.

Voici par exemple, les calculs liés à la passerelle du Drac, située près de Grenoble en France. Inaugurée le 14 août 2007, elle permet aux randonneurs de rejoindre les deux rives du lac de Monteynard-Avignonet. La passerelle du Drac relie deux rives distantes de 217 mètres (=écartement e). Si on appliquait la règle vue précédemment la flèche serait alors de 73 mètres, la pente de la passerelle serait alors trop forte pour qu'on puisse y passer. La flèche n'est en réalité que de 9,25 mètres, soit moins de 5% de l'écartement.



Figure VI.12 : Passerelle du Drac, Grenoble, France.

Sur la photo, on remarque la présence de câbles latéraux. Ceux-ci ont pour rôle de stabiliser le pont, qui est fortement sujet à des mouvements de roulis et de tangages, dès que plusieurs utilisateurs l'empruntent ou que le vent souffle. Les câbles latéraux exercent une tension latérale qui assure la stabilité du pont.

VII. Les ponts suspendus

Après avoir étudié un pont aussi rudimentaire que le pont himalayen, on peut se demander quelles surprises nous réservent le pont suspendu dans la mesure où il se présente comme un câble qui supporte une charge uniformément répartie.

Nous allons dans cette section étudier l'équation de la courbe formée par le câble porteur en considérant que la masse de celui-ci est négligeable par rapport à celle du tablier.

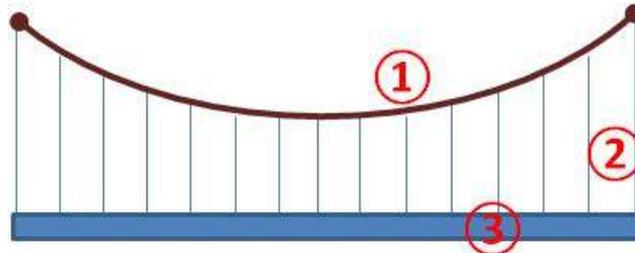


Figure VII.1: représentation de la travée principale d'un pont suspendu. Nous chercherons l'équation du câble principal (1) relié au tablier (3) par les suspentes (2).

1. Bilan des forces sur une portion infinitésimale de câble

Tout comme dans l'étude du pont himalayen, nous allons représenter une portion de câble infinitésimale de longueur $d\ell$ comprise entre les abscisses x et $x+dx$ et les forces qui s'y appliquent.

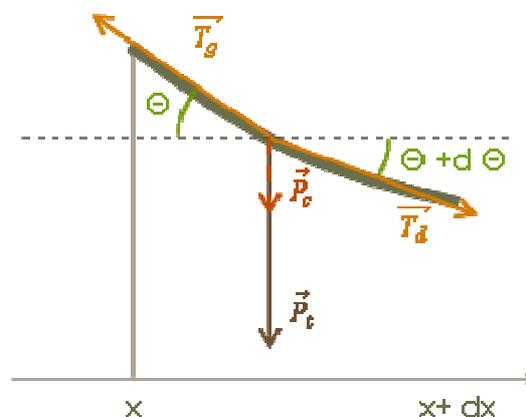


Figure VII.2

Quatre forces agissent sur le câble :

1. \vec{P}_c , le poids du câble lui-même. Comme dans le cas de la chaînette, ses coordonnées dans le repère cartésien sont $\begin{pmatrix} 0 \\ -\lambda g d\ell \end{pmatrix}$, où λ et g représentent respectivement la masse linéique, en [kg/m] et la constante de pesanteur ;

2. \vec{P}_t , le poids du tablier. Ses coordonnées dans le repère cartésien sont $\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{M}{L} g dx \end{pmatrix}$, où $M[\text{kg}]$ est la masse du tablier, supposée uniformément répartie et $L [\text{m}]$ la longueur du tablier.
3. \vec{T}_g , la tension à gauche, s'applique tangentiellement au câble au point d'abscisse x . Ses coordonnées dans un repère cartésien sont $\begin{pmatrix} -T \cos \theta \\ -T \sin \theta \end{pmatrix}$, θ étant l'angle aigu entre l'horizontale et la tangente au câble au point d'abscisse x .
4. \vec{T}_d , la tension à droite, s'applique aussi tangentiellement au câble au point d'abscisse $x+dx$. Ses coordonnées dans le repère cartésien sont $\begin{pmatrix} (T+dT) \cos(\theta+d\theta) \\ (T+dT) \sin(\theta+d\theta) \end{pmatrix}$.

2. Recherche des tensions dans le câble

Comme nous l'avons fait dans le chapitre VI qui nous a permis de découvrir l'équation de la chaînette, nous appliquons le principe d'inertie puisque notre pont est en équilibre statique :

$$\begin{pmatrix} -T \cos \theta \\ -T \sin \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (T+dT) \cos(\theta+d\theta) \\ (T+dT) \sin(\theta+d\theta) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\lambda g d\ell \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{M}{L} g dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ce qui revient au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} -T \cos \theta + (T+dT) \cos(\theta+d\theta) = 0 & (VII.1) \\ -T \sin \theta + (T+dT) \sin(\theta+d\theta) - \lambda g d\ell - \frac{M}{L} g dx = 0 & (VII.2) \end{cases}$$

L'équation (VII.1) est rigoureusement identique à celle obtenue dans le cas de la chaînette. Ce qui nous amène à la même conclusion concernant la tension horizontale :

$$T \cos \theta = T_x = \text{constante}$$

Intéressons-nous à l'équation (VII.2) en procédant de la même façon que dans le chapitre VI :

$$-T \sin \theta + (T+dT) \sin(\theta+d\theta) - \lambda g d\ell - \frac{M}{L} g dx = 0$$

Appliquons la formule d'addition du sinus et distribuons la parenthèse :

$$-T \sin \theta + T(\sin \theta \cos d\theta + \sin d\theta \cos \theta) + (\sin \theta \cos d\theta + \sin d\theta \cos \theta)dT - \lambda g dl - \frac{M}{L} g dx = 0$$

Mettons de l'ordre grâce aux approximations $\cos d\theta \approx 1$ et $\sin d\theta \approx d\theta$:

$$-T \sin \theta + T \sin \theta + T \cos \theta d\theta + \sin \theta dT + \cos \theta dT d\theta - \lambda g dl - \frac{M}{L} g dx = 0$$

Deux des termes de notre équation s'annulent tandis qu'un troisième est de second ordre et donc négligeable. On a donc désormais l'équation suivante :

$$d(T \sin \theta) = \lambda g dl + \frac{M}{L} g dx$$

La masse du câble étant nettement inférieure à celle du tablier, le terme $\lambda g dl$ peut être négligé par rapport au terme $\frac{M}{L} g dx$. Nous obtenons alors l'équation suivante :

$$d(T \sin \theta) = \frac{M}{L} g dx$$

Cette équation peut également s'écrire : $\frac{d}{dx}(T \sin \theta) = \frac{M}{L} g$ (VII.3)

Or, nous avons déjà vu plus tôt que :

$$T \sin \theta = T_x \tan \theta = T_x \frac{dy}{dx} = T_x y'$$

L'équation (VII.3) s'écrit alors $\frac{d}{dx}(T_x y') = \frac{M}{L} g$ (VII.4)

Nous avons montré que la tension horizontale était constante, ce qui revient à écrire (VII.4) sous la forme :

$$T_x y'' = \frac{M}{L} g$$

Ou encore $y'' = \frac{M}{T_x L} g$ (VII.5)

De nouveau, nous obtenons une équation différentielle dont la solution est de la forme :

$$f(x) = y = ax^2 + bx + c$$

Si on utilise un repère dans lequel le point le plus bas du câble a pour coordonnées (0,0), nous avons $c=0$ et $b=0$.

La solution à l'équation différentielle (VII. 5) est donc la fonction suivante:

$$\boxed{y = \frac{M \cdot g}{2 \cdot T_x \cdot L} x^2} \quad (\text{VII.6})$$

Cette équation montre que la courbe d'un pont suspendu n'est plus un cosinus hyperbolique mais une simple parabole.

3. Etude de la tension dans le câble

Représentons donc notre situation, pour mieux comprendre le problème :

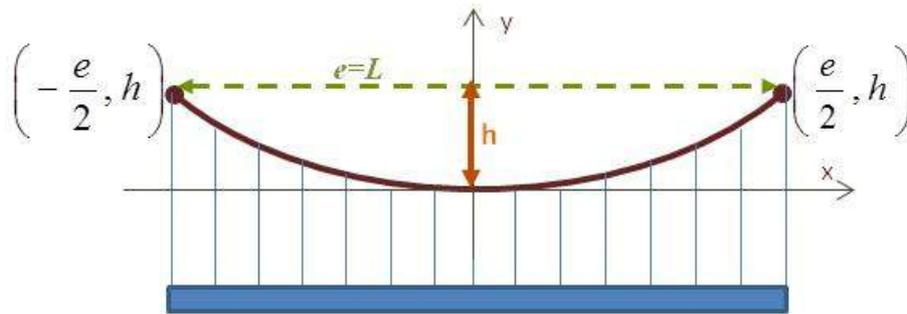


Figure VII.3

De cette représentation, on tire que la courbe parabolique du câble passe par le point de coordonnées cartésiennes $\left(\frac{e}{2}, h\right)$.

Grâce à cette observation, nous allons pouvoir calculer les valeurs des tensions horizontales et verticales au point d'ancrage.

Commençons par la tension horizontale en remplaçant x par $\frac{e}{2}$ et y par h dans (VII.6) :

$$h = \frac{M \cdot g}{2 \cdot T_x \cdot L} \left(\frac{e}{2}\right)^2$$

En simplifiant et en utilisant $e=L$, on obtient

$$h = \frac{e \cdot Mg}{8 T_x}$$

Nous obtenons alors une expression de la tension horizontale :

$$T_x = \frac{M \cdot g \cdot e}{8h} \quad (\text{VII.7})$$

Faisons maintenant de même avec la tension en y

$$T_y = T_x y'$$

En utilisant (VII.6), on a

$$y' = \frac{M \cdot g}{T_x \cdot L} x$$

On obtient alors

$$T_y = \frac{Mgx}{L}$$

Nous en déduisons l'expression de la tension résultante:

$$T = \sqrt{\left(\frac{Mge}{8h}\right)^2 + \left(\frac{Mgx}{L}\right)^2} = Mg \sqrt{\left(\frac{e}{8h}\right)^2 + \left(\frac{x}{L}\right)^2}$$

On observe que la tension augmente du centre du câble parabolique vers le point d'ancrage, où elle prend la valeur maximale.

Au point d'ancrage $x = \frac{e}{2} = \frac{L}{2}$ $T_y = \frac{Mg}{2}$ et $T = \frac{Mg}{2} \sqrt{\frac{e^2}{16h^2} + 1}$

4. Calcul de la longueur du câble

Il est possible de calculer la longueur du câble porteur en fonction de la flèche h et de l'écartement e .

Comme dans le cas du pont himalayen, cela revient à calculer :

$$\ell = \int_{-e/2}^{e/2} \sqrt{1+y'^2} dx$$

Or, si $y = \frac{M \cdot g}{2 \cdot T_x \cdot L} x^2$, $y' = \frac{M \cdot g}{T_x \cdot L} x$. En substituant y' dans l'intégrale, on obtient :

$$\ell = \int_{-e/2}^{e/2} \sqrt{1 + \left(\frac{Mg}{T_x L} x\right)^2} dx = 2 \cdot \int_0^{e/2} \sqrt{1 + \left(\frac{Mg}{T_x L} x\right)^2} dx$$

De plus, en utilisant $e=L$ et $h = \frac{e}{8} \frac{Mg}{T_x}$

$$\ell = 2 \cdot \int_0^{e/2} \sqrt{1 + \left(\frac{8h}{e^2} x\right)^2} dx$$

Il est possible d'intégrer cette expression de façon explicite, mais nous avons pris le parti de développer le radical en série de Mac Laurin.

Nous utilisons le développement suivant :

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{x^2}{8} + \dots$$

Où x est à remplacer par l'expression $\left(\frac{8h}{e^2} x\right)^2$.

$$\begin{aligned} \ell &\approx 2 \cdot \int_0^{e/2} \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{8h}{e^2} x\right)^2 - \frac{1}{8} \left(\frac{8h}{e^2} x\right)^4 + \dots \right) dx \approx 2 \cdot \left[x + \frac{32h^2 x^3}{3e^4} - \frac{8^3 h^4 x^5}{5e^8} + \dots \right]_0^{e/2} \\ \ell &\approx 2 \cdot \left(\frac{e}{2} + \frac{4h^2}{3e} - \frac{16h^4}{5e^3} + \dots \right) \approx e \left(1 + \frac{8}{3} \left(\frac{h}{e}\right)^2 - \frac{32}{5} \left(\frac{h}{e}\right)^4 + \dots \right) \end{aligned}$$

Cette série converge pour des valeurs de h et e telles que $\frac{h}{e} < \frac{1}{4}$ ¹

Dans la plupart des ponts, la flèche est beaucoup plus petite que la longueur de la travée principale : le plus souvent, la flèche est comprise entre 1/8 et 1/12 de la longueur de la travée principale et en général, dans les ponts de petites et moyennes portées, on a :

$$h \approx \frac{L}{9}$$

Les trois termes retenus pour le calcul de l'intégrale constituent donc une approximation satisfaisante.

Dans le cas du Golden Gate, $h=160$ m, pour $e=L=1280$ m. On a un câble de longueur :

$$\ell \approx 1331 \text{ m}$$

¹ D'après MERIAM J.L. et KRAIGE L.G., **Mécanique de l'ingénieur : Statique**, 1993, Editions Reynald Goulet

5. Calcul des forces agissant sur les pylônes

Le rôle essentiel du câble porteur est de transmettre aux appuis les efforts en tension qu'il reçoit des charges permanentes.

Nous allons examiner les forces qui agissent sur les piles du pont.

Les câbles, pour maintenir l'équilibre du pont, exercent une tension vers le bas sur la pile. Dans la représentation ci-dessous, le câble principal exerce sur la pile de droite une tension \vec{T}_g ayant une composante horizontale \vec{T}_{xg} et une composante verticale \vec{T}_{yg} . Le câble d'ancrage, que nous supposons par facilité **tendu et rectiligne**, répond en exerçant une force \vec{T}_d résultant de \vec{T}_{xd} et \vec{T}_{yd} , composantes respectivement horizontale et verticale.

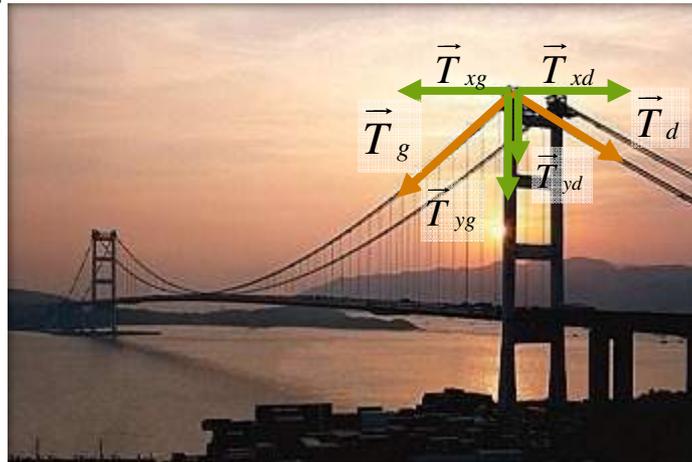


Figure VII.4

L'équilibre des forces impose que

$$T_{xd} = T_{xg} = \frac{Mge}{8h} \quad (\text{VII.8})$$

Nous pouvons en déduire la tension verticale agissant sur la pile :

$$T_{yg} + T_{yd} = \frac{Mg}{2} + T_{xd} \tan \theta = \frac{Mg}{2} + \frac{Mge}{8h} \tan \theta = \frac{Mg}{2} \left(1 + \frac{e \tan \theta}{4h} \right) \quad (\text{VII.9})$$

Où θ est l'angle formé par le câble d'ancrage et le sol au massif d'ancrage.

Les piles subissent donc une compression et transmettent les forces verticales aux fondations. Il est essentiel que celles-ci soient capables de supporter ces charges. Quand les conditions géologiques ne sont pas satisfaisantes, on doit creuser parfois très en profondeur pour obtenir des couches résistantes.

On peut également déduire de (VII.8) la tension dans le câble d'ancrage :

$$T_A = \frac{Mge}{8h \cos \theta} \quad (\text{VII.10})$$

Cette tension est d'autant plus réduite que l'angle θ est petit, c'est-à-dire si la travée de rive est grande. Néanmoins, cette tension reste considérable.

Le massif d'ancrage doit donc assurer lui aussi une stabilité parfaite. Le coût des ponts suspendus est largement tributaire de celui des massifs d'ancrage des câbles porteurs, qui peut être gigantesque si le sol naturel n'est pas un rocher résistant.

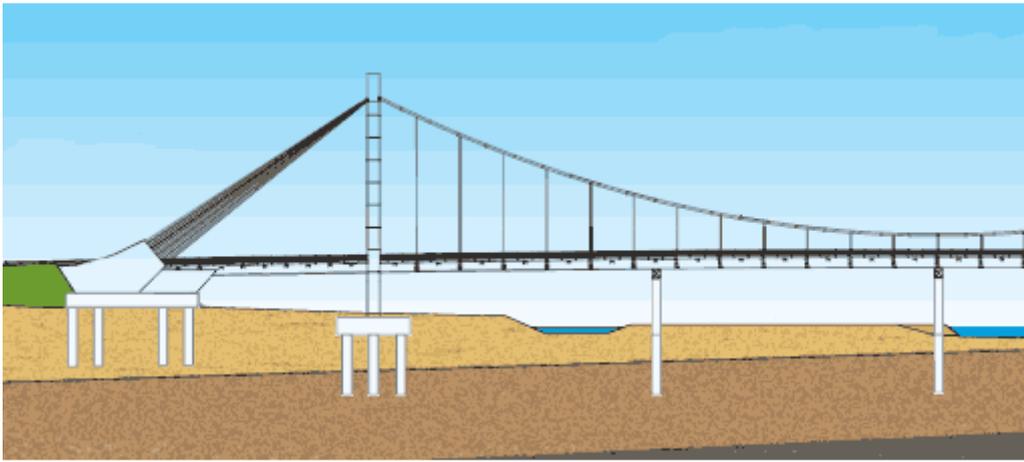


Figure VII.5 : Travée de rive d'un pont suspendu avec massif d'ancrage. On remarque que les fondations sont renforcées par des pieux pour assurer la stabilité du sol.

6. Application au cas du Golden Gate

Nous avons calculé les tensions dans les câbles principaux d'un pont bien connu de tous, le Golden Gate Bridge. Bien entendu, une rapide observation montre que le Golden Gate Bridge possède deux câbles porteurs. Nous avons simplifié l'étude des tensions dans ceux-ci en imaginant que le poids du tablier de la travée principale était également réparti sur les deux câbles.



Figure VII.6: Le Golden Gate Bridge, San Francisco, USA

Les données que nous avons collectées sont les suivantes :

- Charge statique estimée: 311 kN/m
- Ecartement (= longueur de la travée principale) : $e = 1280 \text{ m}$
- Hauteur des pylônes au-dessus du tablier \approx flèche : $h = 152 \text{ m}$
- Angle au massif d'ancrage $\theta = 19^\circ$

La charge statique par mètre nous permet de calculer la charge supportée (Mg) par chaque câble :

$$Mg = \frac{311.1280}{2} \approx 2.10^5 \text{ kN}$$

Si on applique ces valeurs à nos équations (VII.8), (VII.9) et (VII.10), on obtient les tensions suivantes au pylône:

- **Pour la tension horizontale :**

$$T_{xd} = T_{xg} = \frac{Mge}{8h} \approx \frac{2.10^5 1280}{8.152} = 2,1.10^5 \text{ kN}$$

- **Pour la tension verticale sur la pile** (uniquement la contribution du câble principal):

$$T_y = \frac{Mg}{2} \approx \frac{2.10^5}{2} = 1.10^5 \text{ kN}$$

- **La tension générale dans le câble est donc**

$$T \approx \sqrt{(2,1.10^5)^2 + (1.10^5)^2} \approx 2,3.10^5 \text{ KN}$$

On peut également estimer la tension qui s'exerce sur le massif d'ancrage à la culée :

$$T_A = \frac{T_x}{\cos \theta} \approx \frac{2,1.10^5}{\cos 19^\circ} \approx 2,2.10^5 \text{ kN}$$

Dans le chapitre III consacré aux sollicitations sur les structures, nous avons relié la résistance R_e d'un matériau, de l'acier par exemple, à l'effort de traction à laquelle il était soumis grâce à la formule suivante donnant la contrainte agissant sur la section:

$$R_e > \sigma_p = s.\sigma$$

Où $\sigma = \frac{N}{S}$ et s est un coefficient de majoration, le plus souvent compris entre 1 et 10.

Ces formules vont nous permettre de déduire la section que doivent avoir les câbles principaux dans le cas du Golden Gate.

Or aujourd'hui, les câbles courants ont une résistance de 1770 N/mm².

En prenant un coefficient de sécurité égal à 1,5, nous pouvons aisément trouver la résistance pratique et la section de câble nécessaire:

$$R_e > \sigma_p = s.\sigma \Leftrightarrow 1770 > 1,5 \cdot \frac{2,2.10^5}{S}$$

$$S > \frac{3,3.10^8}{1770} \approx 1,9.10^5 \text{ mm}^2 .$$

Cela revient à un câble de 24 centimètres de rayon !



Figure VII. 7 : Les câbles porteurs du Golden Gate sont énormes!

7. Un brin d'histoire

Dans les civilisations chinoises, incas, ou africaines, le pont suspendu fut très tôt un moyen de franchissement traditionnel, principalement dans les régions montagneuses. Ils atteignaient régulièrement 50 mètres de longueur.



Figure VII.8 : Chili, Ancien Pont Suspendu Sur Le Quillota

Ces ponts antiques étaient le plus souvent composés de lianes et d'un tablier en bois mais on trouvait déjà en Chine des ponts suspendus avec chaînes d'acier au III^e siècle av. J.-C.

C'est en Amérique que naquit le pont suspendu « moderne ». James Finley eut l'idée d'un pont suspendu avec des chaînes en fer forgé. Devant le succès de cette formule qui permet un pont peu coûteux et facile à construire, il déposa un brevet. Ainsi, une première génération de ponts vit le jour à partir de 1810. La portée se situait entre 15 et 50 mètres maximum. Mais l'utilisation de ces ponts fit apparaître un problème : la résonance et la pression qui s'exercent sur les chaînes les faisaient céder. Malgré le savoir-faire des ingénieurs américains, la qualité du fer forgé était alors insuffisante. Cela causa de nombreux accidents qui mirent un terme au succès naissant du pont suspendu.

A cette époque, les Britanniques, qui possédaient une énorme avance dans la métallurgie, trouvèrent le moyen d'améliorer les chaînes. Cela permit aux ponts suspendus de redevenir très ambitieux.

Les premiers ponts britanniques furent construits vers 1815 et les dimensions ne cessèrent de croître. En 1826, le célèbre ingénieur Thomas Telford construisit le pont suspendu de Menai (Menai Bridge), avec une portée de 125m qui fit de lui le plus grand pont du monde de l'époque. Seul moyen d'atteindre de telles distances, le pont devint un monument à la gloire du progrès.



Figure VII.9 :
Menai Bridge, île d'Anglesey au nord du pays de Galles, 1826.



Figure VII.10 : Ancien pont suspendu

La révolution industrielle européenne aida à l'exportation du pont suspendu sur le continent européen. La compagnie française des Frères Seguin (Ardèche) proposa un projet innovant en 1822. L'entreprise comprit très vite qu'un pont suspendu classique est impossible en France du fait de la qualité médiocre des chaînes. Elle tenta alors de les remplacer par des faisceaux de fils de

fer. Ce fut la naissance du câble. En même temps, on ajouta l'utilisation de

béton hydraulique pour les fondations, du béton armé pour les superstructures, et des structures de renforcement rigidifièrent le tablier en bois. Le pont suspendu prit, à peu de chose près, sa forme moderne.

Le pont suspendu de Brooklyn à Manhattan (projeté par John Augustus Roebling et construit par son fils, de 1869 à 1883) marqua le retour en force des ponts suspendus aux Etats-Unis. Il était une fois et demie plus long que tous les ponts construits jusque-là. Pour éviter les incidents résultant d'oscillations provoquées par le vent ou la circulation, une carcasse rigide en acier fut incorporée au tablier sur toute sa longueur. Les États-Unis se lancèrent dès lors dans la construction de ponts suspendus gigantesques. Une multitude de ponts y furent construits avec comme tendance l'augmentation de la finesse du tablier.

Depuis le milieu du 19ème siècle, le monde assiste à une véritable surenchère concernant le dimensionnement des ouvrages à câbles porteurs paraboliques. Actuellement, les plus longues travées de pont au monde sont toutes de type "suspension". On estime qu'une portée record de 3000 mètres est tout à fait envisageable.



Figure VII.11 : Pont d'Akashi, Japon, 1998, record de portée (1991 m)

VIII. Les ponts à haubans

Les ponts à haubans, ne tiennent pas, comme les ponts suspendus, grâce à deux câbles principaux ancrés sur les rives, mais grâce à de nombreux câbles obliques – les haubans - attachés aux piliers du pont, qui supportent la totalité du poids du pont.

Depuis le milieu du vingtième siècle, les ponts à haubans font un retour triomphal dans le paysage. Et ce n'est pas un hasard. Les techniques de calcul et les matériaux ayant évolué, les ponts haubanés offrent aujourd'hui de multiples possibilités architecturales, ils peuvent offrir de grandes portées même quand les conditions géologiques ne sont pas optimales, puisque, contrairement aux ponts suspendus, ils ne nécessitent pas de solides points d'ancrage aux berges, ils sont plus résistants aux déformations et enfin, ils présentent l'énorme avantage d'une facilité relative de mise en œuvre et d'entretien (inutile d'arrêter la circulation pour effectuer la maintenance des câbles) et un coût beaucoup plus modéré que celui des ponts suspendus.



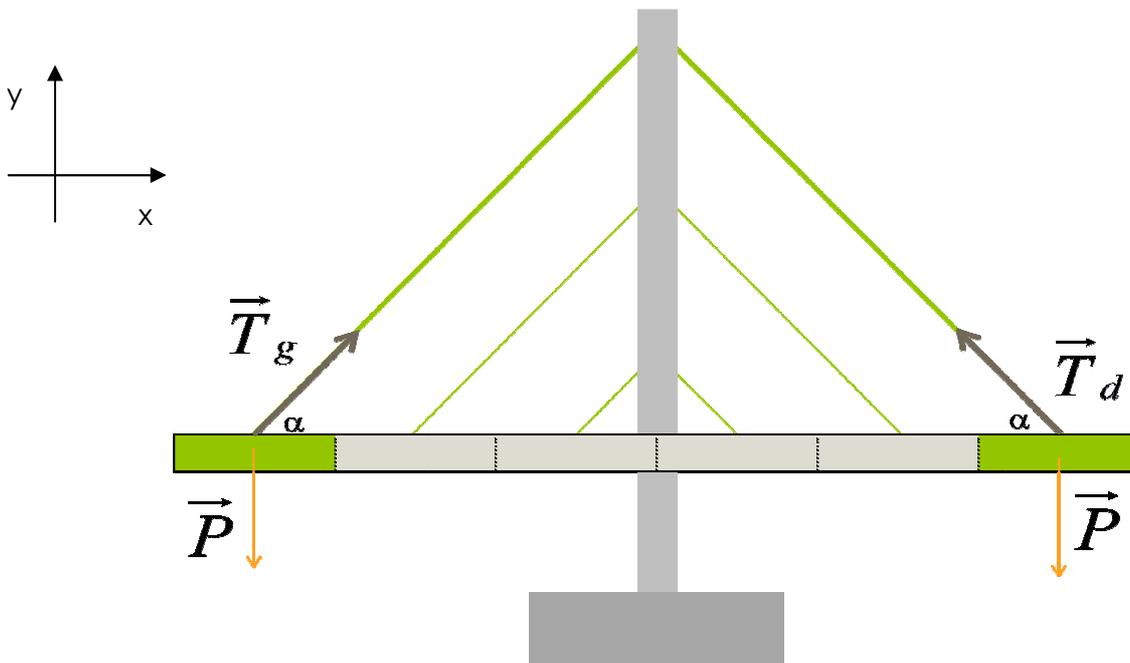
Figure VIII.1 : Le Viaduc de Millau, le pont le plus haut du monde, une fierté belgo-française.

Nous nous sommes intéressés de près à ce type de pont, considéré aujourd'hui comme le pont de l'avenir. D'autant plus que nous avons eu la chance de rencontrer l'ingénieur Jean-Marie Cremer, concepteur du Viaduc de Millau. C'est la raison pour laquelle, nos calculs se sont basés essentiellement sur l'étude de ce gigantesque ouvrage d'art.

Nous avons cherché à déterminer la tension dans les haubans, en fonction de la configuration employée, de montrer en quoi il n'y avait nul besoin de dispositif d'ancrage comme dans les ponts suspendus et quelle devait être le diamètre des câbles employés pour une telle structure.

1. Tension dans un hauban

Recherchons la tension dans un câble en fonction de son inclinaison et du poids de tablier qu'il supporte (nous supposons que la charge est uniformément répartie, de même que les haubans sont espacés d'une égale distance). Découpons le tablier en autant de portions que de haubans. Nous étudions uniquement deux portions de tablier, symétriques par rapport au pylône, de même poids \vec{P} et soumises à la traction de deux haubans présentant une même inclinaison avec le tablier.



Les forces en présence admettent les coordonnées suivantes :

- Le poids : $\vec{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix}$ où m est la masse supposée constante de la portion envisagée et g est la constante de pesanteur ;
- La tension à gauche : $\vec{T}_g = \begin{pmatrix} T_g \cos \alpha \\ T_g \sin \alpha \end{pmatrix}$ où α est l'angle aigu entre le hauban et le tablier.
- La tension à droite : $\vec{T}_d = \begin{pmatrix} -T_d \cos \alpha \\ T_d \sin \alpha \end{pmatrix}$ où α est l'angle aigu entre le hauban et le tablier.

Le principe d'inertie nous permet de calculer la tension agissant sur les câbles.

$$\Sigma \vec{F} = \vec{0}$$

$$2\vec{P} + \vec{T}_g + \vec{T}_d = \vec{0}$$

Sur les composantes horizontales :

$$-T_d \cdot \cos \alpha + T_g \cdot \cos \alpha = 0$$

Les deux tensions sont donc égales en intensité:

$$T_d = T_g = T$$

Sur les composantes verticales:

$$T_d \cdot \sin \alpha + T_g \cdot \sin \alpha - 2mg = 0$$

Or

$$T_d = T_g = T$$

$$2 T \cdot \sin \alpha = 2 mg$$

On isole la tension

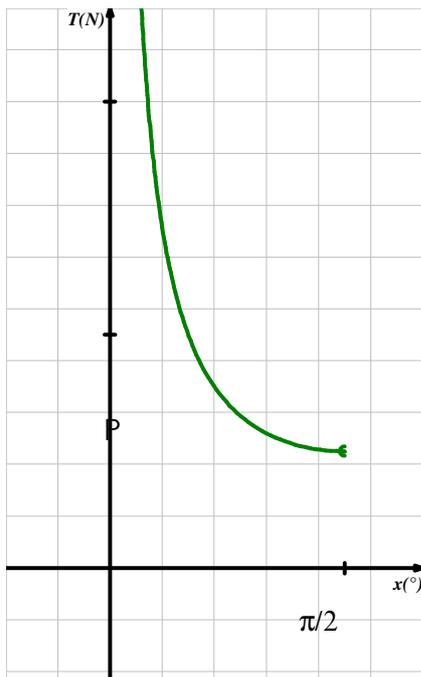
$$T = \frac{mg}{\sin \alpha}$$

Où m représente la masse de la portion soutenue par le hauban ($m = \frac{\text{masse du tablier}}{\text{nombre de haubans}}$)
et α est l'angle aigu entre le hauban et le tablier.

Il est facile de généraliser pour n paires d'haubans symétriques, portant un tablier de poids P et formant un angle aigu α avec celui-ci :

$$T = \frac{P}{2n \sin \alpha}$$

Le graphique suivant montre l'évolution de la tension dans le hauban en fonction de son inclinaison. On observe que :



- Si l'angle a une amplitude proche de 0° , la tension sera très élevée.
- Si l'angle a une amplitude proche de 90° , la tension sera très faible.

Si on augmente la taille du pylône, c'est-à-dire, si on augmente la hauteur du point d'accroche, l'amplitude de l'angle se rapproche des 90° , minimisant ainsi la tension.

Malheureusement, augmenter la hauteur des pylônes a ses limites : on devra utiliser plus de matériel pour le pylône et le consolider. Toutes ces modifications ont un prix, évidemment.

Si on décide de ne pas augmenter la hauteur des pylônes, les limites de la tension imposent une portée plus faible.

- **Rôle des pylônes**

Tout comme dans le pont suspendu, les pylônes répartissent les forces provenant des câbles.

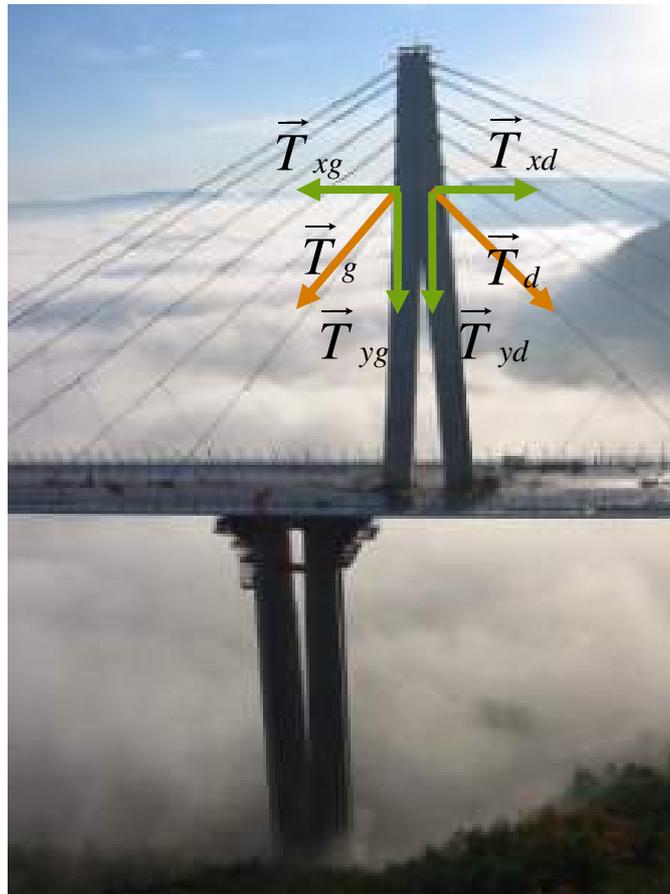


Figure VIII.2 : Placement des forces agissant sur un pylône

Les tensions exercées à gauche et à droite du pylône \vec{T}_g et \vec{T}_d résultent chacune de deux composantes horizontales et verticales \vec{T}_{xg} et \vec{T}_{yg} pour la gauche, respectivement \vec{T}_{xd} et \vec{T}_{yd} pour la droite.

Les tensions horizontales opposées de part et d'autre des pylônes en se compensant permettent l'équilibre horizontal : il n'est pas nécessaire d'avoir sur la culée un puissant ancrage au sol comme dans le cas des ponts suspendus.

Quant aux tensions verticales transmises aux pylônes, elles agissent en compression et se transmettent à la pile, qui elle-même les transmet aux fondations : c'est pourquoi, il est impératif de fixer les piles sur un sol stable ou de le renforcer si besoin (cf. chapitre IX).

2. Etude de différentes configurations

• Typologie des ponts haubanés

On peut classer les ponts haubanés suivant le nombre de haubans. Les premiers ponts à haubans construits dans les années 1950 avaient peu de câbles. La grande distance entre les haubans concentrés nécessitait un haubanage provisoire pendant le montage et ne permettait que de courtes portées.

Aujourd'hui, l'écartement des haubans a régulièrement décliné et les systèmes multi-haubanés sont généralement utilisés.

Les ponts à haubans peuvent être classés également suivant la position et le type de nappe (ensemble de haubans reliés au même pylône).

Pont à nappe axiale

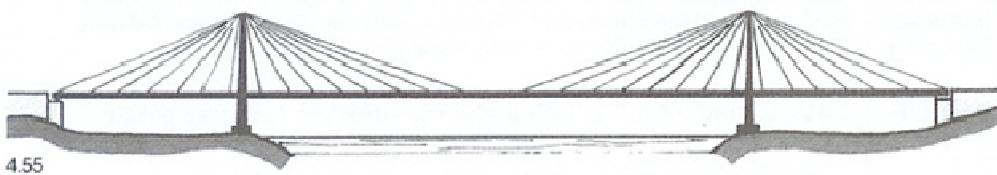
Pour les petites et moyennes portées allant jusqu'à 400 à 500 mètres, apprécié pour ses qualités esthétiques. Ce choix nécessite la mise en œuvre d'un tablier rigide en torsion.

Pont à nappes latérales :

Associé aux très grandes portées, supérieures à 500 mètres en raison de la nécessité de stabiliser le tablier au vent.

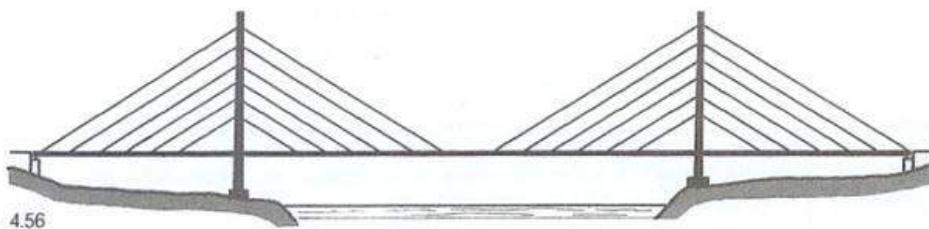
Pont à haubans en éventail :

les haubans sont ancrés en un seul point d'ancrage en tête de pylône

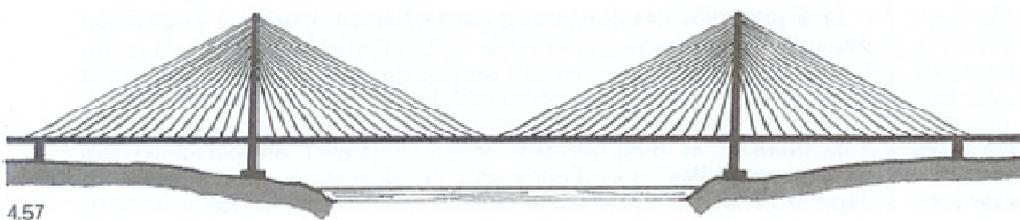


Pont à haubans en harpe :

Les haubans sont parallèles entre eux.



Pont à haubans en semi-éventail (ou semi-harpe) : Pont à la configuration intermédiaire pour lequel la distance des points d'ancrage des haubans sur le pylône est inférieure à la distance des points d'ancrage sur le tablier.



Il existe également d'autres configurations d'habanage, comme la configuration en étoile, mais elles sont employées moins fréquemment car elles ne présentent pas autant d'avantages que les précitées.



Figure VIII.3 : Le pont Octávio Frias de Oliveira, Sao Paulo, Brésil est un pont haubané inclassable du point de vue de sa structure de nappes.

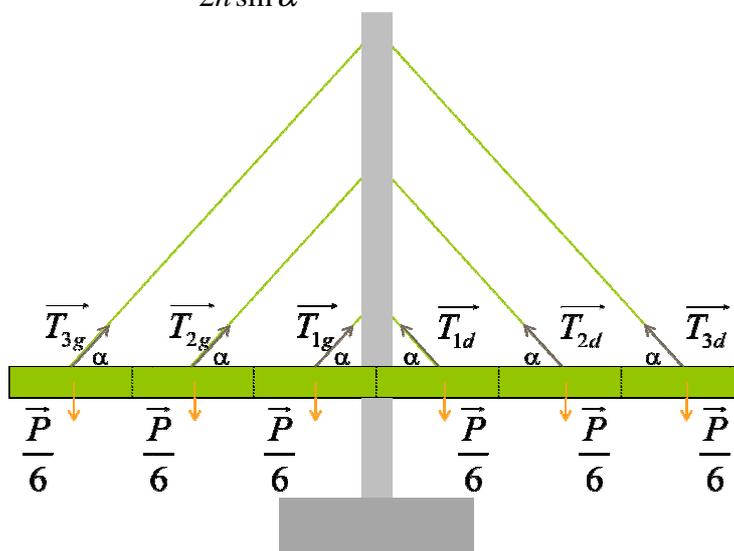
Nous avons choisi d'étudier en particulier les deux configurations standards les plus communes: le pont en harpe et le pont en éventail.

- **Comparaison des habanages en harpe et en éventail**

Considérons tout d'abord un habanage en harpe présentant deux paires de trois habans parallèles répartis uniformément de part et d'autre du pylône. Dans ce cas, on peut supposer que le poids total du tablier est réparti équitablement entre les six habans.

Pour calculer la tension, nous utilisons la formule trouvée précédemment :

$$T = \frac{P}{2n \sin \alpha} \text{ avec ici, } n=3 \text{ paires.}$$



Donc, puisque l'angle a la même amplitude pour tous les haubans du pont en harpe, la tension est la même également :

$$T = \frac{P}{6 \sin \alpha}$$

La somme des composantes verticale des tensions T_v compense le poids du tablier.

La tension horizontale résultante T_H provenant de la partie gauche du haubanage vaut quant à elle :

$$T_H = 3.T \cos \alpha = 3 \cdot \frac{P}{6 \sin \alpha} \cdot \cos \alpha = \frac{P}{2} \cdot \cot \alpha$$

La tension horizontale provenant de la partie droite du haubanage est égale en intensité.

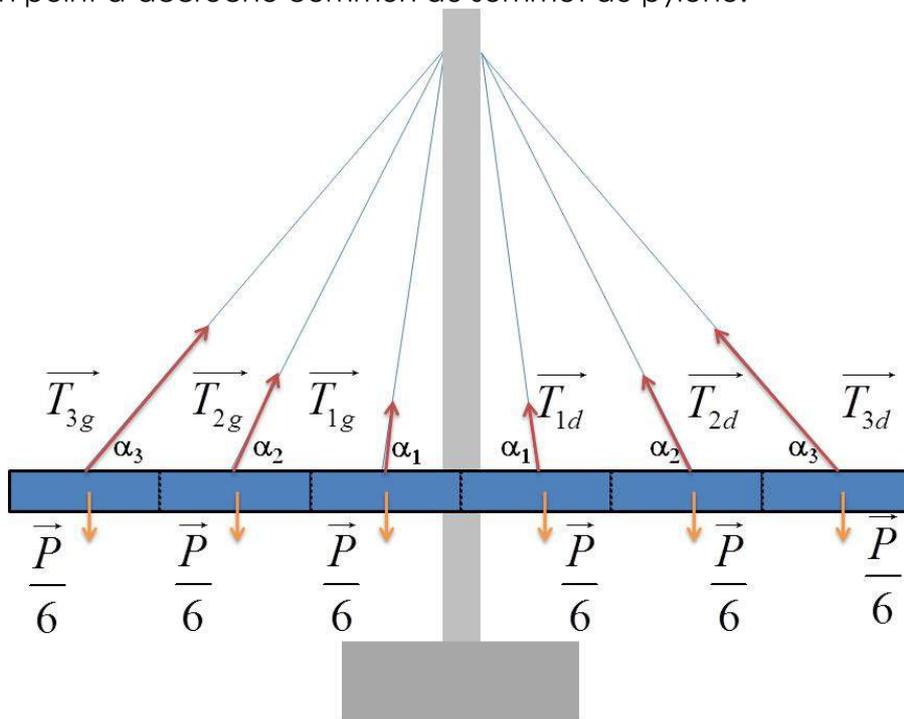
On peut généraliser le problème à deux paires de n haubans avec ces formules :

$$T = \frac{P}{2n \sin \alpha}$$

$$T_H = n.T \cos \alpha = n \cdot \frac{P}{2n \sin \alpha} \cdot \cos \alpha = \frac{P}{2} \cdot \cot \alpha$$

On remarque que cette valeur décroît avec α : les efforts horizontaux intérieurs agissant sur le tablier sont plus petits pour un angle élevé. Or, dans le cas d'un haubanage en harpe, augmenter l'angle α pour une longueur de tablier donnée signifie augmenter la hauteur du point d'ancrage sur le pylône, soit augmenter la hauteur de ce dernier, ce qu'on ne peut faire que de façon limitée pour des raisons de stabilité.

Considérons à présent une configuration en éventail faite de 2 paires symétriques de 3 haubans répartis uniformément sur le tablier: les haubans ne sont plus parallèles mais ont un point d'accroche commun au sommet du pylône.



Utilisant la même formule que précédemment, on obtient :

$$T_i = \frac{P}{6 \sin \alpha_i}$$

Comme nous l'avons vu précédemment, la tension diminue quand l'angle augmente. La tension dans les câbles n'est donc pas constante, plus le hauban est éloigné du pylône, plus il est tendu.

La somme des composantes verticales des tensions est identique au cas en harpe et compense le poids. Cependant, la tension horizontale T_H provenant du haubannage situé d'un côté du pylône diffère.

$$T_H = T_1 \cos \alpha_1 + T_2 \cos \alpha_2 + T_3 \cos \alpha_3 = \frac{P}{6} \cdot (\cot \alpha_1 + \cot \alpha_2 + \cot \alpha_3)$$

Généralisant le problème à deux paires de n haubans :

$$T_i = \frac{P}{2n \sin \alpha_i}$$

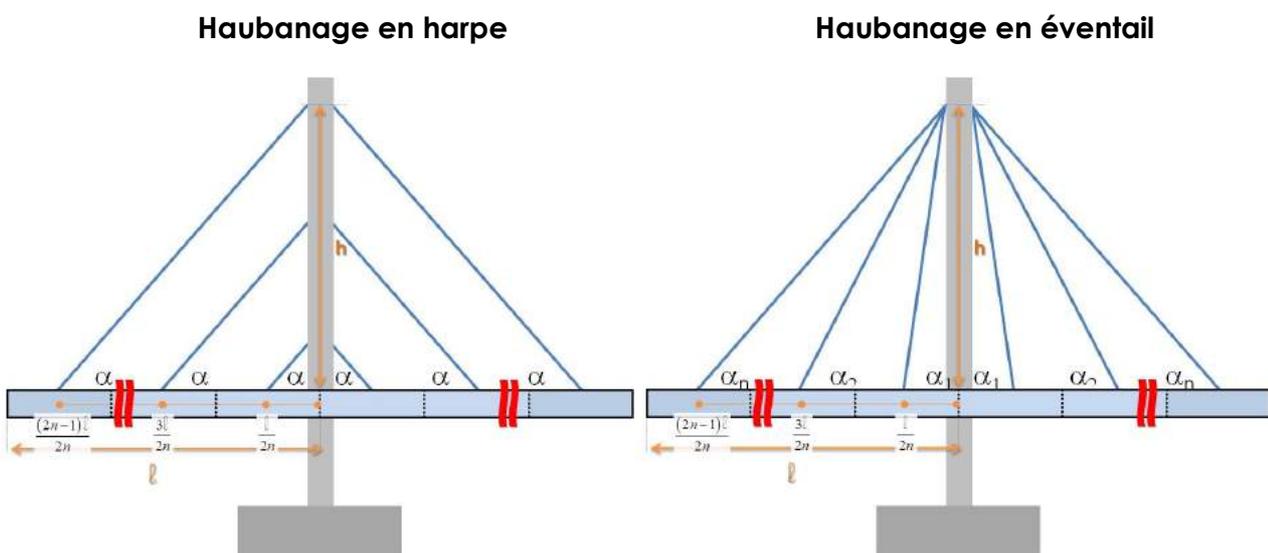
$$T_H = \frac{P}{2n} \cdot \sum_{i=1}^n \cot \alpha_i$$

Nous allons comparer la valeur de la tension horizontale des deux configurations.

Imaginons deux configurations pour lesquelles le point d'ancrage est à une hauteur maximale h et de longueur de demi-tablier ℓ . Imaginons aussi que les haubans soient uniformément répartis. Leurs points d'ancrage se situent à des distances d_i du pylône formant une suite arithmétique de raison $\frac{\ell}{n}$. En considérant de rang 1 le hauban le plus proche du pylône, nous avons la répartition suivante :

$$d_1 = \frac{\ell}{2n} ; d_2 = \frac{3\ell}{2n} ; d_3 = \frac{5\ell}{2n} ; \dots ; d_i = \frac{(2i-1)\ell}{2n} ; \dots ; d_n = \frac{(2n-1)\ell}{2n}$$

Voici la schématisation des configurations à comparer :



Les relations trigonométriques dans le triangle rectangle nous permettent d'écrire :

$$\cot \alpha = \frac{(2n-1) \ell}{2n h} \text{ et } \cot \alpha_i = \frac{(2i-1) \ell}{2n h}$$

Si bien que la tension horizontale T_H d'un pont en éventail devient :

$$T_H = \frac{P}{2n} \cdot \sum_{i=1}^n \cot \alpha_i = \frac{P}{2n} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{(2i-1) \ell}{2n h} = \frac{P}{4n^2} \cdot \frac{\ell}{h} \sum_{i=1}^n (2i-1)$$

La somme indiquée correspond à la somme des n premiers impaires et vaut n^2 . On obtient alors :

$$T_H = \frac{P}{2n} \cdot \sum_{i=1}^n \cot \alpha_i = \frac{P}{4n^2} \cdot \frac{\ell}{h} \cdot n^2 = \frac{P}{4} \cdot \frac{\ell}{h}$$

Celle-ci est à comparer à la tension T_H d'un pont en harpe :

$$T_H = \frac{P}{2} \cdot \cot \alpha = \frac{P}{2} \cdot \frac{(2n-1) \ell}{2n h} = \frac{P}{4} \cdot \frac{\ell}{h} \cdot \frac{(2n-1)}{n}$$

Or,
$$\frac{2n-1}{n} = 2 - \frac{1}{n} > 1$$

car $\frac{1}{n} < 1$ si le nombre de hauban est supérieur à 1.

Par conséquent, une configuration en éventail impose des efforts horizontaux sur le tablier inférieurs à ceux d'une configuration en harpe.

Parce qu'elles apportent moins d'effort de compression sur le tablier, on pourrait donc penser que les configurations en éventail prennent l'avantage sur les configurations en harpe.

A cela s'ajoute le fait que le pylône soumis à ces efforts peut commencer à fléchir. La résistance et la rigidité des pylônes doit donc être élevée pour réduire les influences sur le tablier. Pour toutes ces raisons, le diamètre du pylône doit être plus grand, ce qui engendre un surcoût de production.

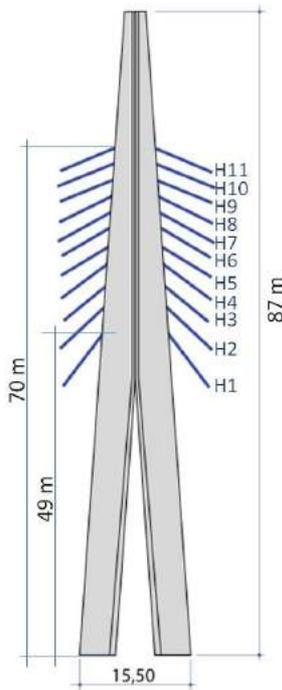
Le pont en éventail apporte une solution à ce problème : le pylône est moins sollicité ce qui permet de diminuer la section de celui-ci. Le meilleur équilibrage des haubans de part et d'autre des pylônes entraîne des sollicitations beaucoup plus faibles par rapport à une disposition en harpe.

Cependant, d'autres facteurs sont à prendre en compte. Ainsi, la disposition parallèle des haubans présente un intérêt esthétique : le fait que les câbles se croisent toujours sous le même angle confère à ce type de pont un aspect de légèreté. Par ailleurs, on peut imaginer aussi que la production en masse des câbles serait moins onéreuse dans le cas d'une configuration en harpe puisque chaque câble, pour une résistance pratique donnée, possède la même section, ce qui rendrait cette configuration meilleure d'un point de vue économique.

Ensuite, dans le cas d'une configuration en éventail, le point d'ancrage commun de tous les câbles au sommet des pylônes implique le renforcement de la tête, ce qui est assez coûteux.

En général, les constructeurs optent pour un compromis entre les deux configurations : le haubanage en semi-éventail. C'est cette configuration qui a été retenue pour l'édification du Viaduc de Millau.

3. Application du cas du Viaduc de Millau



Nous avons voulu observer de façon théorique l'influence de l'angle dans le calcul de la tension du hauban dans le cas de la travée P1-P2 du Viaduc de Millau. Nous avons comparé les tensions dans les haubans H1 et H11, dans les 3 configurations : harpe, éventail et semi-éventail. Il s'agit bien de résultats fictifs.

La travée P1-P2 est longue de 343 m, soutenue par 11 paires de haubans reliés à un pylône haut de 87 mètres.

La configuration est en semi-éventail, avec des ancrages situés entre 49 m et 70 m de hauteur au-dessus du tablier.

Nous avons simplifié le problème en imaginant que la travée était de façon exclusive et uniforme supportée par chaque hauban.

Dans le chapitre III, nous avons estimé le poids mort du pont. Nous considérons ici une charge linéique de 300 kN/ml soit un poids de 103 MN.

Ce qui nous a amené à considérer que chaque hauban supportait un tronçon de 15,6 mètres, la distance au pylône variant de 7,8 mètres pour H1 à 164 mètres pour H11.

Cela nous permet d'estimer l'angle α que fait le hauban avec le tablier. Il varie de 80° pour H1 à 23° pour H11, dans la configuration en éventail, varie de 84° pour H1 à 23° pour H11 (nous considérons un accrochage à 70 mètres), il est constamment de 23° dans la configuration en harpe.

Le tableau ci-dessous reprend pour chaque configuration l'angle α et la tension dans le hauban T.

	Harpe		Eventail		Semi-Eventail	
	α	T (MN)	α	T	α	T
H1	23°	12	84°	4.71	80°	4.75
H11	23°	12	23°	12	23°	12

La tension dans le hauban le plus éloigné vaut plus du double de celui qui est le plus proche.

En réalité, les haubans sont ancrés sur le tablier à des intervalles réguliers de 12.51 m, mais le hauban H1 supporte une longueur de tablier plus longue que les autres.

Voici la répartition que l'on trouve dans la travée P1-P2 (en supposant toujours une charge linéique uniforme de 300 kN/ml).

	α	longueur de tronçon (m)	Poids du tronçon (MN)	Tension T (MN)	Contribution à l'effort horizontal (MN)
H1	55	17,9	5,37	6,59	3,82
H2	48	12,51	3,75	5,08	3,43
H3	42	12,51	3,75	5,58	4,12
H4	38	12,51	3,75	6,07	4,77
H5	35	12,51	3,75	6,54	5,36
H6	33	12,51	3,75	6,98	5,89
H7	30	12,51	3,75	7,42	6,40
H8	29	12,51	3,75	7,84	6,88
H9	27	12,51	3,75	8,21	7,30
H10	26	12,51	3,75	8,59	7,73
H11	25	13	3,90	9,30	8,44
Efforts horizontaux				T_H	64,14

L'effort horizontal sur le tablier a pour effet de le comprimer.

Comme dans le cas du pont suspendu, on peut estimer la section des câbles à prévoir pour supporter de telles tensions. Nous avons fait le calcul pour H1 et H11, en admettant un coefficient de sécurité égal à 1,5 et en utilisant des câbles en acier de résistance maximale 1860 N/mm².

$$R_e > \sigma_p = s \cdot \sigma \Leftrightarrow 1860 > 1,5 \cdot \frac{T}{S} \text{ ou } S > \frac{1,5T}{1860}$$

Cela donne pour H1 une section de 5313 mm², soit un rayon de 41 mm et pour H11, une section de 7498 mm², soit un rayon de 49 mm.

Dans la réalité, les haubans les plus longs sont constitués de 91 torons de 150 mm² de section et les plus courts en contiennent 45 de section identique. La résistance maximale d'un hauban peut ainsi varier de 12.500 à 25.000 kN.

IX. La construction d'un pont



Fig. IX.1 : Construction du viaduc de Millau

Il existe autant de méthodes de construction de ponts qu'il n'existe de sortes de ponts. C'est pourquoi nous avons choisi de ne nous intéresser qu'à la construction d'un type de ponts en particulier : la construction des ponts à haubans.

Comme nous l'avons découvert précédemment, un pont à haubans est constitué de plusieurs parties, à savoir : les fondations (A dans la figure IX.1), les piles (B dans la figure IX.1), et l'ensemble tablier-pylône-haubans (resp. C, D, E dans la figure IX.1). Comme vous vous en doutez certainement, chacun de ces éléments possède une méthode de construction qui lui est propre et nous avons décidé de vous les présenter dans l'ordre chronologique de la construction.

1. Les fondations

Les fondations sont sans doute la partie la plus importante de l'édifice.

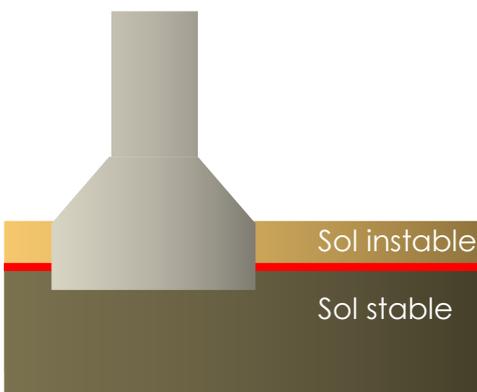
En effet, ce sont sur elles que reposera l'entièreté du poids du pont une fois les travaux finis. Le rôle des fondations et des culées est d'améliorer les caractéristiques géologiques du sol (en assurant une bonne portance et évitant le tassement) et de répartir uniformément les charges de l'ouvrage sur celui-ci. Ce sont elles qui assureront la stabilité de l'édifice.

Par conséquent, il n'existe pas une sorte de fondations qui prédomine pour l'ensemble des ponts à haubans, il en existe une multitude s'adaptant à la géologie de chaque terrain. D'une manière générale, on distingue trois grands types de fondations.



Fig. IX.2 : Construction et fondation du pont de Rion-Antirion - Grèce

● Les fondations superficielles :



Ce type de fondations est employé lorsque le sol présente des caractéristiques mécaniques particulièrement favorables à la construction d'un pont : les roches doivent être peu fissurées, saines, non désagrégées.

L'édification des fondations superficielles se divise en trois étapes : dans un premier temps la couche superficielle du sol est retirée pour atteindre la couche inférieure géologique plus stable (assise). Ensuite, on coule une couche de 5 à 10 cm de béton faiblement dosé qui isole les armatures

métalliques du sol afin d'éviter l'apparition de rouille. Enfin, on installe les coffrages et coule le béton.

- **Les fondations profondes :**

Lorsque la couche stable de sol est trop profonde (en général à une profondeur supérieure à 8 mètres), on utilise cette seconde méthode. Il est indispensable d'appuyer la masse du pont sur la couche résistante par l'intermédiaire de pieux ou pilotis. S'il n'y a pas de couche résistante en profondeur, on plante malgré tout les pieux dans un matériau qui n'est pas résistant et le pieu est alors appelé « pieu flottant ». La résistance à l'enfoncement est alors provoquée par le frottement des couches de terrain sur la surface latérale du pieu.

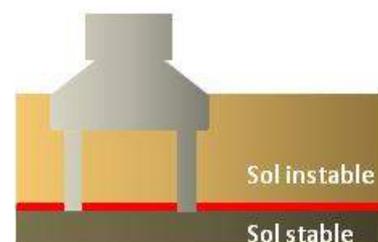


Fig. IX.3 : Fondations des piles du pont de Rion-Antirion - Grèce

- **Renforcement du sol :**

Cette troisième méthode est employée lorsque le sol présente des caractéristiques géologiques particulièrement peu favorables à la construction. Dans ce cas, on améliore les caractéristiques mécaniques du sol soit en y insérant des éléments résistants tels que des tuyaux d'acier, soit en y amalgamant un additif aux propriétés liantes.

Les fondations doivent être mises hors gel. C'est-à-dire, malgré la qualité du sol, il faut parfois creuser de profondes fondations. Cela dépend bien évidemment du climat.

Dans le cas du Viaduc de Millau, les fondations de toutes les piles sont constituées de quatre puits de grand diamètre (4.5 m et 5.0 m), de 10 à 14 m de longueur, creusés dans les horizons rocheux et d'une semelle de répartition de 3 à 5 mètres d'épaisseur. On peut qualifier ces fondations de profondes.

2. Les piles



Fig. IX.4 : Construction d'un des piles du viaduc de Millau

En général, les piles sont fabriquées en béton et coulées sur place, au fur et à mesure, par tranche d'environ 4 mètres de hauteur (levée). On installe un coffrage mobile dans le bas de la pile, à l'intérieur de ce coffrage on dispose les armatures métalliques pour ensuite y couler le béton. Une fois le béton sec, on fait coulisser le coffrage mobile de 4 mètres vers le haut et on répète l'opération.

Dans le cas du Viaduc de Millau, les piles ont été dimensionnées pour résister aux charges verticales du tablier, aux déplacements latéraux de leur tête provoqués par la dilatation du tablier, aux effets du vent et bien entendu, pour s'adapter à la topographie du site : la hauteur varie de 78 mètres pour la pile P7 à 245 mètres pour la pile P2, lui conférant le titre de pile la plus haute du monde.

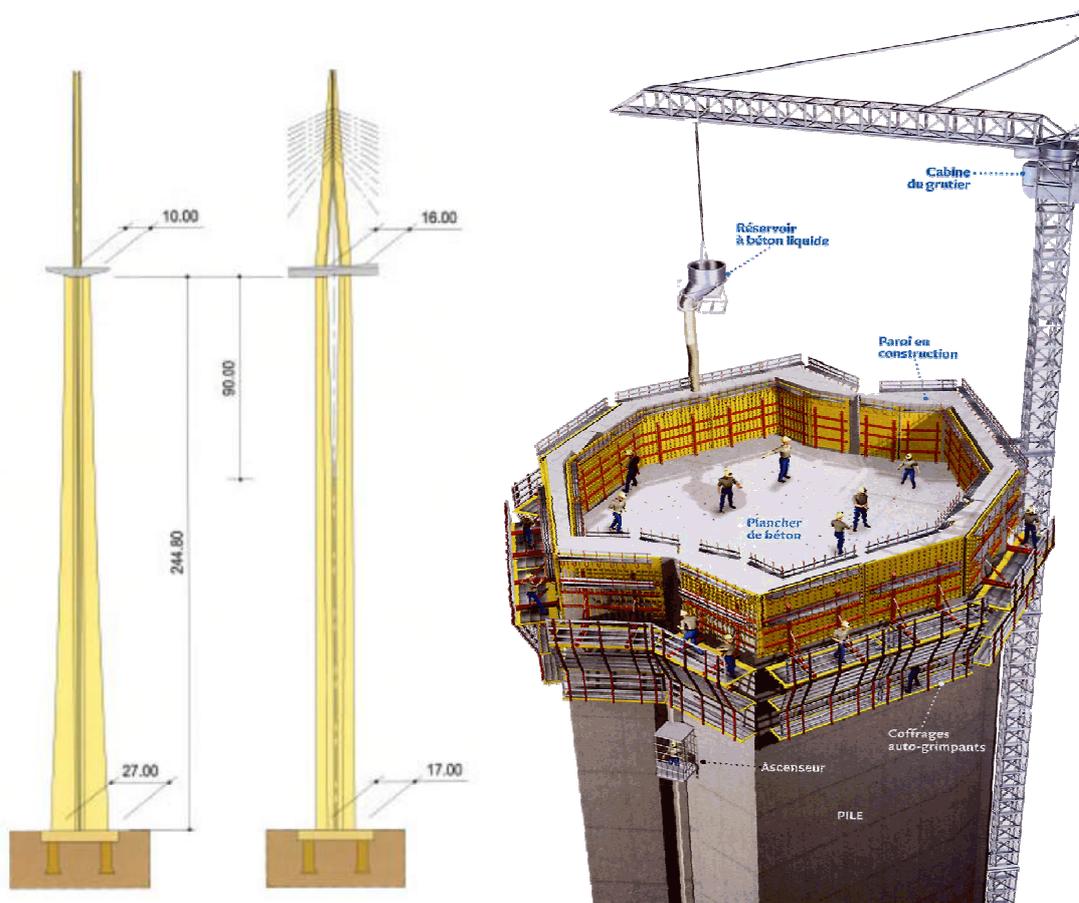


Figure IX.5 : Les piles du Viaduc de Millau présentent un dédoublement des fûts 90 m sous le niveau du tablier afin de répondre en souplesse aux mouvements du tablier dus à sa dilatation.

3. Les pylônes

Les pylônes travaillent essentiellement en compression : on privilégie l'emploi du béton, même si la plupart des premiers ponts à haubans ont des pylônes en acier. Généralement, on utilise un coffrage grimpant pour les construire.

La structure et la forme des pylônes dépendent essentiellement du nombre de travées et de la disposition des haubans (cf. section VIII). Leur rôle est de transmettre les efforts qui viennent des haubans et du tablier du pont aux fondations, tenant compte du fait que le tablier « flotte » et que les sollicitations sur celui-ci doivent être absorbées par les pylônes. C'est ce qui détermine la forme des pylônes que l'on emploie.

Les pylônes peuvent se présenter comme des mâts simplement verticaux, solution offrant une faible rigidité à la flexion mais sans doute la plus économique, et employée généralement dans les configurations en harpe.

Pour améliorer la stabilité de l'ouvrage et augmenter la rigidité, on emploie des pylônes en forme de A ou V inversé. Ce mode de suspension, plus difficile à mettre en œuvre et plus coûteux, est appliqué quand on a des grandes portées pour lesquelles le comportement aérodynamique devient important.

Par ailleurs, la forme des pylônes s'adapte au nombre de nappes de haubans prévues.

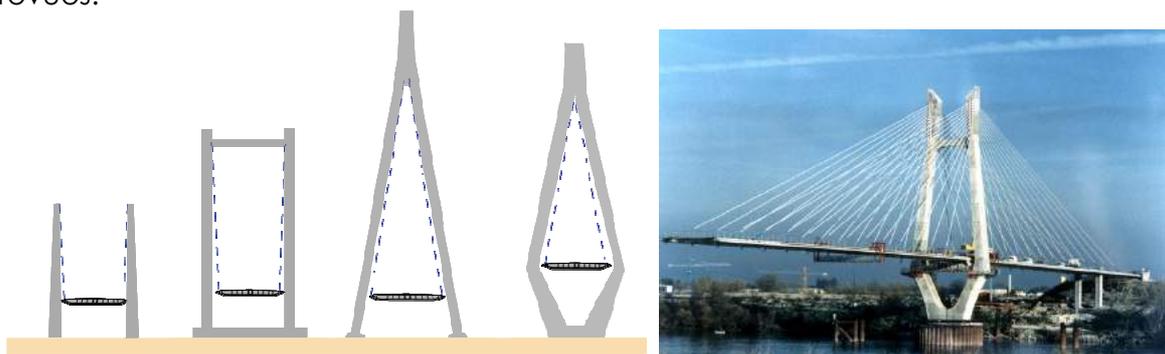


Figure IX.6 : Forme des pylônes pour une double nappe de haubans, comme le Pont de Beaucaire-Tarascon, France.



Figure IX.7: Forme des pylônes pour une simple nappe de haubans, comme le Pont de Wandre, Liège, Belgique.

Il arrive parfois que les pylônes ne soient pas verticaux mais inclinés. C'est le cas pour le pont de Térénez, qui enjambe l'Aulne en France et qui repose sur deux pylônes en forme de lambda. Il ne s'agit pas d'une fantaisie esthétique du concepteur, mais plutôt la réponse à une contrainte de type mécanique.



Figure IX.8 : Pont de Térénez, Bretagne, France

Dans le Viaduc de Millau, les pylônes, hauts de 87 mètres, présentent une forme de V inversé. Pour réduire les délais de construction de l'ouvrage, les pylônes ont été réalisés en acier ce qui leur a permis d'être préfabriqués et montés d'une pièce sur le tablier très rapidement. La forme en V, qui permet un ancrage plus solide et plus de rigidité, a été imposée pour limiter la propagation des efforts de haubanage de travées en travées et la déformation du pont.



Figure IX.9 : Les pylônes en V inversé du Viaduc de Millau

4. Le tablier

Le tablier du pont doit répondre à de nombreuses sollicitations. La portée et le coût déterminent le choix du matériau composant le tablier :

- béton jusqu'à la portée d'environ 300 m,
- mixte acier-béton jusqu'à 500 m. environ,
- tout acier au-delà de 500 m.

Avec des piles et pylônes souples, il faut prévoir un tablier rigide, donc assez épais. Par contre, avec des piles et pylônes rigides, il est possible d'avoir un tablier plus souple et donc, plus mince.

Le Viaduc de Millau étant soumis à l'influence de vents importants dans la région, le choix du tablier a été orienté vers un profil aérodynamique (double aile d'avion retournée) qui lui assure une stabilité face au vent d'une part, et d'autre part, vers moins d'inertie en choisissant un tablier plus mince, ce que permettaient les piles et pylônes rigides.

Le tablier du viaduc, véritable squelette du pont, est donc fait de plus de 2000 plaques d'acier, et mesure 4,20m de haut, 2460m de long et 32m de large pour une masse totale d'environ 36000 tonnes. Toutes les pièces ont été construites dans les usines Eiffel du nord de la France et acheminées jusqu'à Fos-sur-Mer, où un premier assemblage a permis de constituer les caissons qui forment la partie centrale du tablier, véritable colonne vertébrale du pont.

L'ensemble a été ensuite transporté sur le site par convoi exceptionnel, pour le montage final. Pas moins de 152 voyages ont été nécessaires, chacun des convois embarquant 60 tonnes de charpentes métalliques.



Figure IX.10 : Structure métallique en forme de double aile d'avion du tablier du Viaduc de Millau.

Enfin, vient la partie la plus délicate et la plus spectaculaire de la construction : l'assemblage du tablier.

D'une manière générale, on distingue deux grandes méthodes d'assemblage des pylônes et du tablier. La première est l'encorbellement successif tandis que la seconde est le poussage aussi appelé lançage du tablier. Chacune présente ses avantages et ses inconvénients et leur utilisation dépend donc de différents facteurs tels que le coût, les caractéristiques géographiques et climatiques.

● **L'encorbellement**

Cette méthode consiste à construire un tablier de pont par tronçons successifs à partir des piles. Ensuite, on fixe à la partie d'ouvrage déjà exécutée un tronçon appelé voussoir. Ce tronçon devient alors autoporteur et il permet de fixer un nouveau tronçon à ses côtés.

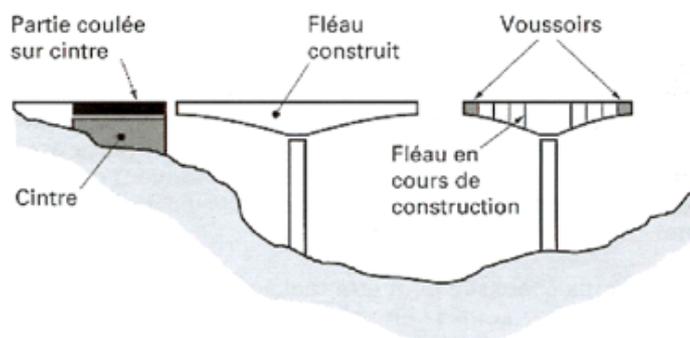


Fig. IX.11 : Assemblage d'un pont par encorbellement

On distingue **l'encorbellement à l'avancement** dans lequel on commence à travailler d'une extrémité du pont vers l'autre et **l'encorbellement équilibré**. Dans ce cas, le premier voussoir est fixé sur le sommet d'une pile. On attache ensuite un second voussoir au premier à l'aide d'éléments provisoires, on répète l'opération avec un troisième voussoir que l'on fixe cette fois de l'autre côté de la même façon pour rétablir l'équilibre. On continue ainsi en installant un voussoir alternativement de chaque côté du pylône, le tablier est ainsi maintenu en équilibre à la manière d'une immense balance tout au long du chantier.

Ces voussoirs sont fabriqués à terre et généralement apportés par convoi exceptionnel sur le lieu du chantier où ils sont assemblés.

Cette méthode convient pour tous les types d'ouvrages, il arrive même que ce soit la seule méthode envisageable.

Cependant, le nombre de voussoirs à mettre en place est souvent grand car ils sont très courts par rapport à la longueur de l'ouvrage, ce qui engendre beaucoup de main d'œuvre ainsi que la mise en place délicate de nombreux joints. Par ailleurs, le procédé est lent et a un coût élevé notamment dû aux machines de levage.



Figure IX.12 : hissage d'un voussoir lors de la construction en encorbellement d'un pont.

- **Le poussage**

La seconde technique d'assemblage est le poussage ou lançage. Cette méthode consiste à confectionner un tablier sur une rive ou sur les deux rives de la brèche à franchir, puis à le mettre en place sur ses appuis définitifs par déplacement longitudinal.



Fig. IX.13 : Phase de poussage du Viaduc de Millau

On monte tout d'abord une première section de tablier sur laquelle un premier pylône est installé. On installe ensuite les haubans de ce pylône pour assurer une meilleure répartition de la tension tout au long du processus.

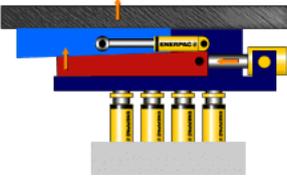
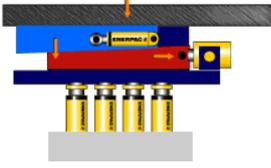
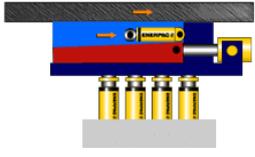
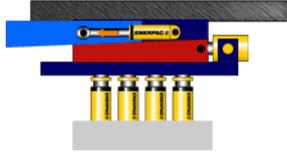
Une fois cette première section de tablier réalisée, elle est poussée sur les piles grâce à un système de translateurs qui sont situés sur la rive. Ce processus nécessite l'intervention d'un puissant système de translation qui soulève le tablier tout en le poussant dans l'axe des piles.

En effet, sans précaution, le tablier arracherait les piles sur son passage à cause des forces de frottements. Dans le cas de Millau, un système de vérins a été imaginé et conçu spécialement à cet effet.



Figure IX.14 : Lançage du tablier du Viaduc de Millau : cette phase de la construction a exigé une longue réflexion et la mise en place de procédés et structures impressionnantes. A gauche, le translateur sur une pile provisoire.

Le mécanisme est le suivant :

	Action
	Le vérin de levage pousse la cale de levage (rouge) ce qui a pour effet de lever le tablier.
	Le vérin de poussée (bleu) tire la cale de poussée qui entraîne le tablier avec elle. Le tablier avance.
	Le vérin de levage reprend sa position initiale pour reposer le tablier.
	Le vérin de poussée reprend sa position initiale pour permettre au translateur de redémarrer un nouveau cycle.

Un problème que l'on rencontre quand on doit mener une lourde charge sur de grandes distances au-dessus du vide est évidemment le porte-à-faux.

Divers équipements permettent de limiter le porte-à-faux lors de la poussée du tablier.

On utilise un avant-bec métallique, plus léger par rapport au tablier, situé en tête de celui-ci, de façon à accoster le plus rapidement possible sur les têtes des piles.

Figure IX.15 : : Le tablier Nord du Viaduc de Millau et son avant-bec



Cependant, dans certains cas, la distance entre les piles étant trop importante (comme pour le viaduc de Millau), il faut préalablement installer des pylônes provisoires (appelés palées) entre les piles existantes, comme un échafaudage qu'on n'a plus qu'à enlever à la fin des travaux. Une fois le tablier en place, on le fixe aux piles et on met les haubans sous tension. Il ne reste plus qu'à enlever les éventuelles palées provisoires, le pont est terminé.



Figure IX.16 : Viaduc de Millau avec appuis provisoires en structure métallique rouge.

Rapide et économique, la méthode de poussage apporte plus de sécurité pour le personnel, qui travaille au sol pour la confection du tablier et une meilleure organisation du travail. Le principal inconvénient reste la difficulté technique pour compenser les efforts subis par la structure et la nécessité de recourir aux différents systèmes décrits précédemment.

5. Les haubans

Les haubans des ponts doivent supporter de fortes tensions mais également résister à toutes sortes de vibrations, à la corrosion, donc aux effets de la pluie et du vent. Ils doivent présenter conjointement et bonne résistance mécanique et durabilité.

Généralement, les câbles des haubans sont constitués de fils d'acier très fins tressés en toron de plusieurs fils. Ces torons sont eux-mêmes tressés ensemble pour former des câbles encore plus épais et donc plus résistants. Les torons sont choisis pour des raisons économiques. Ils sont très bon marché, vu leur production en grande quantité.

Les plus gros câbles produits pour les ponts jusqu'ici ont un diamètre de 160 mm, correspondant à une charge ultime de 30 MN environ.

Les ancrages de haubans sont d'une importance capitale. Les haubans doivent pouvoir être remplacés individuellement et inspectés sur la longueur. Cela va déterminer le type d'ancrage au pylône et au tablier. On favorise aujourd'hui l'ancrage individuel de chaque toron, avec des possibilités de montage, mise sous tension ou remplacement indépendant.

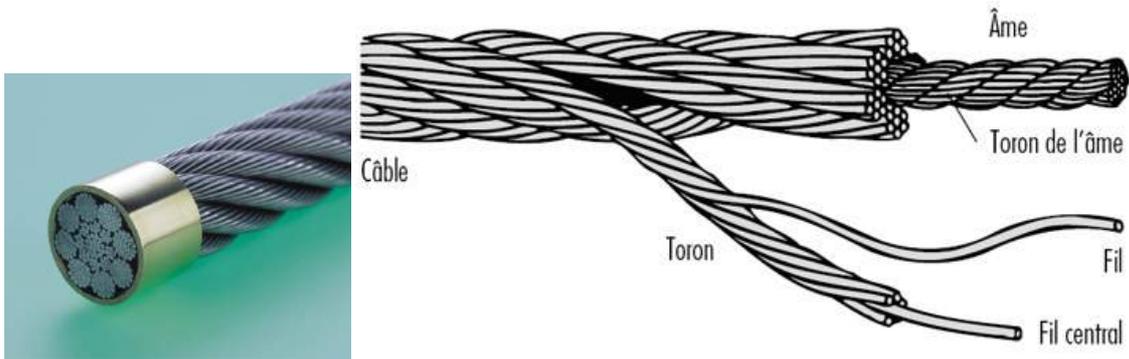


Figure IX.17 : Câble à torons

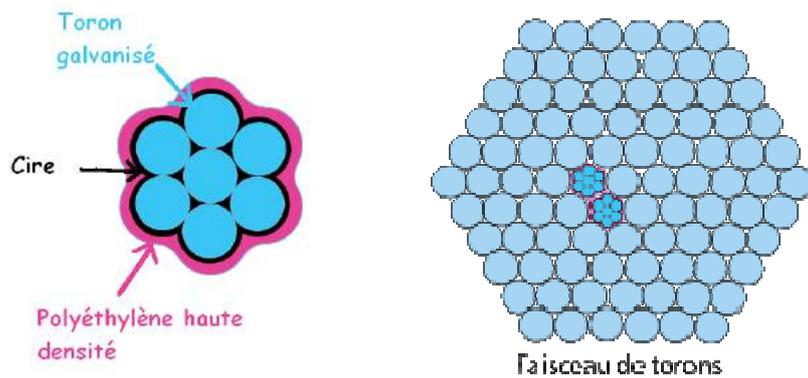


Figure IX.18: Câble monotoron employé pour les haubans du Viaduc de Millau.

Lors de l'assemblage, les haubans sont placés du plus court au plus long donc de bas en haut. Les haubans du haut présentent un plus grand bras de levier puisqu'ils sont plus longs et pourraient engendrer un moment de flexion important dans le pylône. Les haubans sont placés en alternance de part et d'autre du pylône pour maintenir l'équilibre.

Dans le Viaduc de Millau, chaque travée est supportée par une nappe centrale de 11 paires de haubans. Le Viaduc comporte 154 haubans en tout, représentant près de 5000 tonnes d'acier. Chaque toron est galvanisé, ciré et protégé individuellement par une gaine en polyéthylène haute densité, de même que le hauban en lui-même rassemblant tous les torons.



Figure IX.19 : Haubans du Viaduc de Millau et sa tête d'ancrage.

Lors de la phase de lancement du tablier du viaduc de Millau, le système de haubanage étant déjà mis en place, il suivit le mouvement. La particularité de l'opération fut que la tension dans les haubans pouvait varier et suivre les déformations du tablier comme le montre la figure suivante :

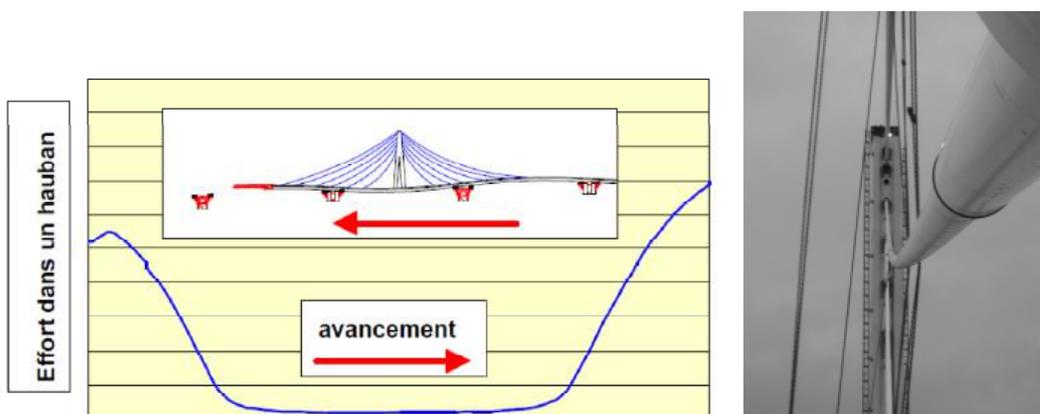
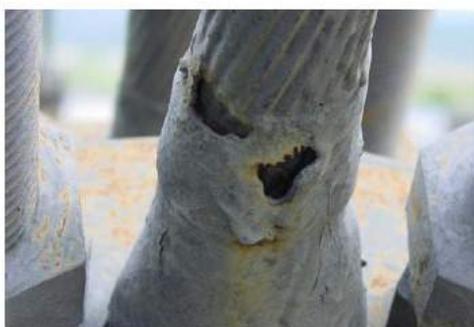


Figure IX.20 : La figure illustre l'évolution des efforts dans les haubans au cours d'un lancement de 171 m. Au début du lancement, le pylône quitte un appui, aucune déformation significative du tablier n'est observée et les haubans sont tendus. Au fur et à mesure que le pylône avance, le tablier se déforme, le pylône descend et les haubans se détendent. Lorsque le pylône se trouve au milieu de la travée, tous les haubans sont détendus. Au $\frac{3}{4}$ des 171 m du lancement, le pylône se cambre pour remonter sur l'appui avant; les haubans retrouvent alors leur efficacité et supportent à nouveau le porte-à-faux.

6. Les finitions

Une fois le tablier en place, la superstructure peut être réalisée : revêtement de chaussée, systèmes de collecte, dispositifs de sécurité, éclairage, poste de péage, etc.



Le travail ne s'arrête pas une fois le pont fini. En effet, une fois terminé, le pont doit encore être entretenu fréquemment et être surveillé de près pour éviter tout problème. Pour son fonctionnement et la sécurité, la société gérant le viaduc de Millau emploie une cinquantaine d'agents aux fonctions diverses : péagers, hôtesses, patrouilleurs, techniciens de maintenance.



La maintenance de l'ouvrage vise à vérifier périodiquement le viaduc afin d'en apprécier l'état de dégradation et de planifier des réparations. Des inspections de certains éléments de l'ouvrage ont lieu fréquemment et une inspection complète est programmée tous les six ans.

La corrosion et la fatigue (le fait que les haubans soient soumis à des variations de tension) doivent être surveillées de près car elles peuvent conduire à des ruptures de fils, voire de haubans.

Figure IX. 21 : Détérioration d'un hauban

Conclusion

En mettant un point final à notre projet, et le considérant avec un peu de recul, nous sommes forcés d'admettre que ce travail a complètement changé notre regard vis-à-vis de ces ouvrages d'art que sont les ponts. Dans ce travail, nous avons redécouvert les lois mathématiques auxquelles les ponts répondent tout en posant des bornes par soucis de temps et de difficulté par rapport à notre niveau de connaissances, ce qui rend notre travail bien évidemment perfectible. Effectivement, le sujet est bien plus vaste et subtil que ce que nous pouvions imaginer.

Après avoir creusé la matière, nous sommes curieux de savoir si elle sera sujette à d'éventuelles évolutions futures. Pour notre part, nous pensons que les ponts ont encore un bel avenir devant eux, qu'ils soient à poutre, en arc, suspendus ou haubanés : ils nous rendent service chaque jour. Les facteurs influençant le type de pont à préconiser sont vastes et divers, les principaux étant listés dans notre recherche, vous devriez être capable, après lecture de pouvoir comprendre et justifier l'utilisation de chaque pont. A notre humble avis, le pont à haubans nous paraît être celui qui possède le plus d'avenir, du fait de son aspect pratique, esthétique, économique mais également par l'évolution matérielle à envisager, du fait de son jeune âge. Nous espérons qu'un jour sa portée soit au moins équivalente, si pas supérieure, à celle d'un pont suspendu (duquel cela constitue le principal avantage). Horace a un jour dit : « *Il faut essayer de soumettre les circonstances et non s'y soumettre* ». C'est pourquoi, malgré qu'aucune avancée matérielle révolutionnaire ne soit prévue dans les années à venir, nous pensons que la portée, éternel défi dans la construction d'un pont, ne va cesser de croître grâce aux nombreux progrès techniques effectués ces toutes dernières années.

Grâce à ce travail, nous avons pu nous situer par rapport aux études que nous allons entreprendre dans les années à venir. De par un travail de recherche et de réflexion auquel nous avons été confrontés mais également par les rencontres que nous avons faites. En effet, Monsieur Jean-Marie Crémer, membre de la direction du bureau d'étude Greisch, qui a participé activement à la conception du viaduc de Millau, nous a généreusement ouvert les portes de son bureau d'études. Il a su répondre aux multitudes de questions que nous nous posions et nous a transmis une part de sa riche expérience. Outre l'aspect d'approfondissement de nos recherches, cette entrevue nous a permis de nous confronter à la réalité du métier d'ingénieur. Ce fut révélateur pour certains qui avaient encore une idée imprécise de leurs études, et ça renforça pour d'autres l'ambition d'entreprendre ces études - auxquelles nous nous destinons désormais pour la plupart. Nous avons également pu nous rendre compte de l'aspect encore plus difficile de la réalisation pratique d'un pont, en particuliers ceux conçus par le bureau. Pour tout cela nous tenons à le remercier énormément pour le temps qu'il nous a accordé dans son emploi du temps chargé. Nous aimerions également remercier notre professeur de math, Madame De Blicq, qui s'est dévouée corps et âme pour nous aider à mener à bien notre projet.

Et enfin, comment vous remercier, vous, cher lecteur, assidu de mathématiques ou simple amateur de ponts, d'avoir consacré un peu de votre temps à la lecture de notre travail.

Bibliographie

- BABETTE, **Chapitre vi : Résistance des matériaux**, 2006, BTS C.I.M.
- BERNOT E., GUILLAUME G., **Banc d'essai Typologie des ponts : maquette d'étude de différents types de ponts**, 2009, Sté A4.
- CHAUSSIN R., BOURNAND Y., CHABERT A., DEMILECAMPS L., DEMONTE A., JARTOUX P., LABOURET P., LE GALL D., LEFAUCHEUR D., NEANT C., **Haubans : Recommandations de la commission interministérielle de la précontrainte**, 2007, Sétra.
- CORMINBOEUF I., **Statique**, 2007, Ecole technique de la construction Fribourg.
- CREMER JM., de VILLE de GOYET V., DELFORNO JY., **Le grand Viaduc de Millau**, 2004, Bureau d'études Greisch.
- CREMER JM., de VILLE de GOYET V., DELFORNO JY., **Viaduc De Millau : la mise au point du projet définitif, les études d'ensemble, les études spéciales**, 2004, Bureau d'études Greisch.
- DATRY, **Cours n°12 : Structures en câbles**, 2007, Ecole Spéciale d'Architecture.
- DEHARD J., **Bac3- Cours de calcul sur les structures : actions sur les structures**, 2007, Institut HEMES Gramme.
- DEGEORGE J., LORGERÉ R. et HAUGHTON M. : **En quoi les ponts à haubans sont-ils les ponts de l'avenir?**, 2010, disponible sur <https://sites.google.com/site/lespontsahaubans/home/introduction-1>, consulté en octobre 2013
- d'ESTE J., GOSSELIN P., MARCHAL J., QUOILIN P., **Les ponts de grande portée**, 2007.
- FREYSSINET SA, **1.7 Haubans**, 2007.
- JAMME D., **Le pont haubané de Millau**, 2008, C.E.V.M.
- LECONTE R., PAWLAK F., HAHN J.-C., BIBOUD F., **Surveillance et entretien des ouvrages d'art**, 2008, Sétra.
- LEHNING H., **Les ponts himalayens**, 2009, magazine tangente.
- MAURER M., **Statique graphique appliquée aux constructions**, 2007, librairie polytechnique.
- MUTTONI A. , **Ponts avec un système statique innovant**, 2000, SIA, Lugano.
- MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, **Concours externe de recrutement de professeurs agrégés, Epreuve portant sur l'ingénierie de projet. Option A : matériaux, ouvrages et aménagements**, 2005, Paris.
- NIKO, **Les efforts supportés par les structures**, 2010.

Webographie

- ANTHONY ET JULIAN, **TPE Pont suspendu**, <http://tpe-pont-suspendu.e-monsite.com/pages/iv-les-contraintes/le-vent.html>, consulté en octobre 2012
- AUTEUR INCONNU, **Comment les oscillations d'un pont suspendu peuvent-elles détruire celui-ci et comment y remédier ?**, <http://tpe-ponts.e-monsite.com/pages/ponts-suspendus/contraintes-appliquees-a-un-pont-suspendu.html>, consulté en octobre 2012
- AUTEUR INCONNU, **Ponts Suspendus**, <http://tpe2012.e-monsite.com/pages/contraintes-naturelles/page.html>, consulté en octobre 2012

- AUTEUR INCONNU , **Le Pont de Brooklyn : New York**, <http://etats-unis.americas-fr.com/new-york/pont-brooklyn.html>, consulté en novembre 2012.
- BASE DE DONNÉES EN LIGNE, **Marc Seguin**, sur <http://art-et-histoire.com>, consulté en octobre 2012
- [BOERAEVE P.] FRESON François-Xavier, JANSSEN Sébastien, KAISER Sylvain, PAULUS Antoine, **La technique du poussage**, 2007, <http://www.gramme.be/unite9/pmwiki/pmwiki.php?n=PrGC0607.LaTechniqueDuPoussage>, consulté en octobre 2012.
- [BOERAEVE P.] SAINTES Alexandre, CAVRENNE David, SYSTERMANS Simon, LEYENS Thomas, **Les ponts suspendus**, 2007, <http://www.gramme.be/unite9/pmwiki/pmwiki.php?n=PrGC0607.LesPontsSuspendus>, consulté en octobre 2012.
- [BOERAEVE P.] VANDERHEYDEN Nicolas, CAULIER Julien, DELIÈGE Michaël, TOUSSAINT Bertrand, **Les ponts mixtes acier-béton**, 2007, <http://www.gramme.be/unite9/pmwiki/pmwiki.php?n=PrGC0607.LesPontsMixtesAcier-beton> , consulté en octobre 2012.
- BILLY Y., **Les ponts suspendus**, <http://ponts-suspendus.chez-alice.fr/index.htm>, consulté en octobre 2012.
- BOR S., POTTIER Ch., WLODARSKI B., **[TPE] Les Ponts**, <http://simonbor.free.fr/TPE/presentation3.html>, consulté en octobre 2012
- CAP SCIENCES, **Secret de ponts**, 2011, <http://fr.scribd.com/doc/47718468/Contraintes-Ponts-p25-26>, consulté en octobre 2012
- CIR S., **TPE : ponts suspendus**, <http://ponts-suspendu.e-monsite.com/>, consulté en octobre 2012.
- [DEHARD J.] BEAUJOT F., RUPCIC M., HERBETO M., BASIGA M., **Les ponts en acier**, 2007, <http://www.gramme.be/unite9/pmwiki/pmwiki.php?n=PrGC0607.LesPontsEnAcier>, consulté en octobre 2012.
- DE NEHOU L., **Technologie des ponts**, http://www.cours-genie-civil.com/IMG/pdf/Technologie_des_ponts.pdf
- ENCYCLOPÉDIE EN LIGNE LIBRE DE DROIT, **Fondations**, sur <http://fr.wikipedia.org/wiki/Fondations>, consulté en novembre 2012.
- ENCYCLOPÉDIE EN LIGNE LIBRE DE DROIT, **Joints de chaussée**, sur http://fr.wikipedia.org/wiki/Joint_de_chauss%C3%A9e, consulté en novembre 2012.
- ENCYCLOPÉDIE EN LIGNE LIBRE DE DROIT, **Pont suspendu**, sur http://fr.wikipedia.org/wiki/Pont_suspendu, consulté en novembre 2012.
- ENCYCLOPÉDIE EN LIGNE LIBRE DE DROIT, **Pont**, sur <http://fr.wikipedia.org/wiki/Pont>, consulté en novembre 2012.
- ENCYCLOPÉDIE EN LIGNE LIBRE DE DROIT, **les ponts à haubans**, sur http://fr.wikipedia.org/wiki/Pont_a_haubans, consulté en novembre 2012.
- GOLDEN GATE BRIDGE HIGHWAY & TRANSPORTATION DISTRICT, **Bridge Design and Construction Statistics**, <http://goldengatebridge.org/research/factsGGBDesign.php>, consulté en octobre 2012
- GRAMME : UNITÉ CONSTRUCTION, **les pylônes** <http://www.gramme.be/unite9/pmwiki/pmwiki.php?n=PrGC0708.Pyl%F4nes>, consulté en octobre 2012.
- LAB MANUAL, **Bridge Building**, <http://education.sdsc.edu/download/enrich/bridges.pdf>, consulté en octobre 2012
- LAMB R., MORRISSEY M. : «How Bridges Work», <http://science.howstuffworks.com/engineering/civil/bridge2.htm>, consulté en octobre 2012
- LOISY M., LE GUEN M., PRUVEST J.-P., PUJADES P., **Les ponts**, <ftp://hebergement.ac-poitiers.fr/rnrtechno/ressource-pont.pdf>, 2007-2008, consulté en novembre 2012

- PINOCHE P., KOBRIIL T. ET BRUNAUD B., **TPE Ponts Suspendus**, sur <http://tpe-ponts-suspendus.e-monsite.com/pages/vocabulaire-sur-les-ponts/>, consulté en novembre 2012.
- SOPHIE, VICTOIRE, BENJAMIN, NICOLAS, **Les ponts suspendus**, <http://dumas-maupassant.pagesperso-orange.fr/Site-Ponts%20Suspendus/Index.htm>, 21/08/2005, consulté en octobre 2012.
- TECHNOLOGIE ST JOSEPH CINQUIÈME, **Les efforts supportés par les structures**, <http://techno5jo.unblog.fr/files/2010/05/proprietesdesmateriaux.pdf>, consulté en octobre 2012
- V.F., V.G., N.P., R.G., **Les ponts suspendus**, <http://zebac.free.fr/visiteur/ponts/>, consulté en octobre 2012

Mediagraphie

- C'est pas Sorcier - **Le viaduc de Millau**, France3, 2003
- FRANK Ph., FIELDS E., SMITH T., National Geographic – Megastructures – Saison 3, épisode 2 : **Impossible Bridges : Greece**, 2005

Figures III.5 , III.7, IV.8 , IV.15, VIII.2 , IX.5 , IX.9, IX.14 , IX.16 , IX.19 , IX.20 , A3, A4 : Bureau d'études Greisch

Figure IX.21 : Service d'étude sur les transports, les routes et les aménagements, Surveillance et entretien des ouvrages d'art, 2ème partie – Fascicule 34-2 – Ponts à haubans, 2008, Bagneux, France

Figure III.6 : HEMON, P , Les effets du vent sur les ponts, Magazine Découverte n°357, juillet-août 2008.

Figure III.3, III.6, IX.12 : Technologie des ponts :

Images en lignes, téléchargée en octobre 2012

Figure III.2 : Le figaro.fr, <http://www.lefigaro.fr/medias/2012/04/20/77f6136a-8ae7-11e1-b0a5-27a13017d311-493x328.jpg>.

Figure III.9 : History in the headlines, <http://www.history.com/news/wp-content/uploads/2012/05/golden-gate-wide.jpg>

Figure IV. 9: Le journal Idées Go, <http://www.lejournalideesgo.com/wp-content/uploads/2012/04/pont4-300x225.jpg>

Figure IV. 10:Structurae, http://files2.structurae.de/files/photos/64/viaduc_de_l_ante.jpg

Figure IV. 11:The assomoir, <http://theassomoir.files.wordpress.com/2011/04/pont-de-tancarville.jpg?w=620>

Figure IV. 12: Encyclopédie libre de droit, SUR http://fr.wikipedia.org/wiki/Pont_du_d%C3%A9troit_d'Akashi Figure IV. 13: Nouvelles images, http://www.nouvellesimages.fr/img_Le-pont-de-Brooklyn--New-York_Torsten-Andreas-HOFFMANN_ref~110.001364.00_mode~zoom.jpg

Figure IV. 14: Linternaute.com, <http://www.linternaute.com/actualite/magazine/photo/les-plus-grands-ponts-du-monde/image/golden-gate-393598.jpg>

Figure IV. 16: UPC câblecom, http://photocompetition.hispeed.ch/original/459441/le_viaduc_de_millau/viaduc_de_millau.jpg

Figure IV. 17: AECOM, http://www.aecom.com/deployedfiles/Internet/Capabilities/Transportation/_images/longspan_rion_mainimg.jpg

Figure IV. 18: Structurae, <http://files2.structurae.de/files/photos/1/20090512/dsc03963.jpg>

Figure IV. 19: Linternaute.com, <http://www.linternaute.com/actualite/magazine/photo/les-plus-grands-ponts-du-monde/image/pont-zakim-bunker-hill-393161.jpg>

Figure V. 1: Flickr, <http://www.flickr.com/photos/ikostenko/4417945034/>

Figure V. 2: Wikipedia, http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/0/00/P9220132_Paris_Pont_de_la_Tournele_reduct.JPG/700px-P9220132_Paris_Pont_de_la_Tournele_reduct.JPG

Figure V. 3: Structurae, <http://files2.structurae.de/files/photos/64/nantua01.jpg>

Figure V. 4: Structurae, http://files2.structurae.de/files/photos/3115/astoria_megler_bridge_8_1_09_002.jpg

Figure VI.1: Ballades au Monteynard, <http://4.bp.blogspot.com/-iNy9uKaQs8k/TvDvEdDiffI/AAAAAAAAACMM/egOfaEAYJNY/s320/Passerelle+drac.jpg>

Figure VI.5: Art et architecture, <http://www.guidespagne.com/wp-content/uploads/2009/05/sagrada-familia1.jpg>

Figure VI.6: Learnstuff, http://t0.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcSp4PXWJ7bkUK4VWWuZKAcl8lqPBKWnYDCsWEDGI_i5SU1BkakyLMBUXkIB

Figure VI.8: futura-sciences, http://www.futura-sciences.com/uploads/tx_oxcsfutura/catenoides_Berkeley_Science_Review_.jpg

Figure VI.12: Grenoble-Montagne.com,, <http://www.grenoble-montagne.com/wp-content/uploads/2011/04/passerelle-drac.jpg>

Figure VII.5 : Unité Construction de Gramme, <http://www.gramme.be/unite9/pmwiki/pmwiki.php?n=PrGC0607.LesPontsSuspendusAppuisSol>

Figure VII.6 : Wikipedia, http://fr.wikipedia.org/wiki/Fichier:Foggy_Golden_Gate.jpg

Figure VII.7 : Destination San Francisco, <http://destinationsanfrancisco.wordpress.com/tag/generalite/>

Figure VII.8 : Gravure sur acier originale dessinée par Elmerick, gravée par Lechard. 1844.

Figure VII.9 : Wikipedia , http://en.wikipedia.org/wiki/Menai_Suspension_Bridge

Figure VIII.1 : Louise DELZESCAUX, <http://communautelachainemeteo.com/communautemeteo/meteo-millau/bruines---pluies-/photo-viaduc-de-millau-sous-le-brouillard-44236.php>

Figure IX.1 : J. Ch.PERRIN, TREKEARTH , <http://www.trekearth.com/gallery/Europe/France/South/Midi-Pyrenees/Millau/photo56098.htm>

Figure IX.2 : Wikipedia, http://fr.wikipedia.org/wiki/Pont_Rion-Antirion

Figure IX.4 : Linternaute.com, <http://www.linternaute.com/actualite/grand-projet/photo/la-construction-du-viaduc-de-millau-en-images/la-construction-du-viaduc-de-millau-en-images.shtml>

Figure IX.6 : ASCOTP, <http://photos.planete-tp-plus.com/picture.php?/4232/category/136>

Figure IX.8 : BLOGZOOM, <http://lolo1964.blogzoom.fr/772795/Le-nouveau-Pont-de-Terenez-Premier-pont-courbe-a-haubans-de-France/>

Figures IX.6-7 : WIKIPEDIA, http://fr.wikipedia.org/wiki/Pont_%C3%A0_haubans

Figure IX. 11 : INSTITUT GRAMME, Méthode de construction des ponts en béton, <http://www.gramme.be/unite9/pmwiki/pmwiki.php?n=BETON0607.MethodesDeConstructionDesPontsEnBeton>

Figure IX. 12 : DE NEHOU L., Technologie des ponts, http://www.cours-genie-civil.com/IMG/pdf/Technologie_des_ponts-PowerPoint.pdf

Figure IX. 13 : FAVARETTO P., Aurelle-Verlac., <http://www.aurelle-verlac.com/millau/viadmil.htm>

Figure IX. 15 : LES CENTRALIENS, <http://www.centraliens.net/groupes-regionaux/provence/provence/prov-cr031005-photos.html>

Figure IX. 15 : PONTS DU MONDE, http://pontsdumonde.free.fr/millau0404_1.php

Figure IX.17 : CONSTRUIRACIER, <http://www.construiracier.fr/familles-de-produits/cables/>

Figure IX.18 : WIKIPEDIA, <http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hauban2.svg>

Figure A1 : IMAGES 4EVER , <http://images.4ever.eu/tag/5643/viaduc-de-millau>

Figure A2 : TRANSPORTS ET LOGISTIQUE, www.aveyron-expansion.fr

Figure A5 : TISSOT. E., Le viaduc de Millau, en septembre 2008, <http://www.midilibre.fr/2012/01/24/millau-et-garabit-deux-viaducs-visent-l-unesco,448076.php>

Figure A6 : LA PHOTO DE LA SEMAINE, <http://www.seniorevasion.fr/la-photo-de-la-semaine/2012/10/13/le-viaduc-de-millau>

X Annexe I : Le Viaduc de Millau



Figure A1 : Le grand Viaduc de Millau, enjambant la vallée du Tarn en France.

Le grand Viaduc de Millau est un magnifique ouvrage d'art que l'on emprunte sur la route qui relie Clermont-Ferrand à Béziers. Ce viaduc autoroutier enjambe la Vallée du Tarn, dans le département de l'Aveyron en France, au-dessus d'une brèche longue de 2460 mètres et profonde de 270 mètres.

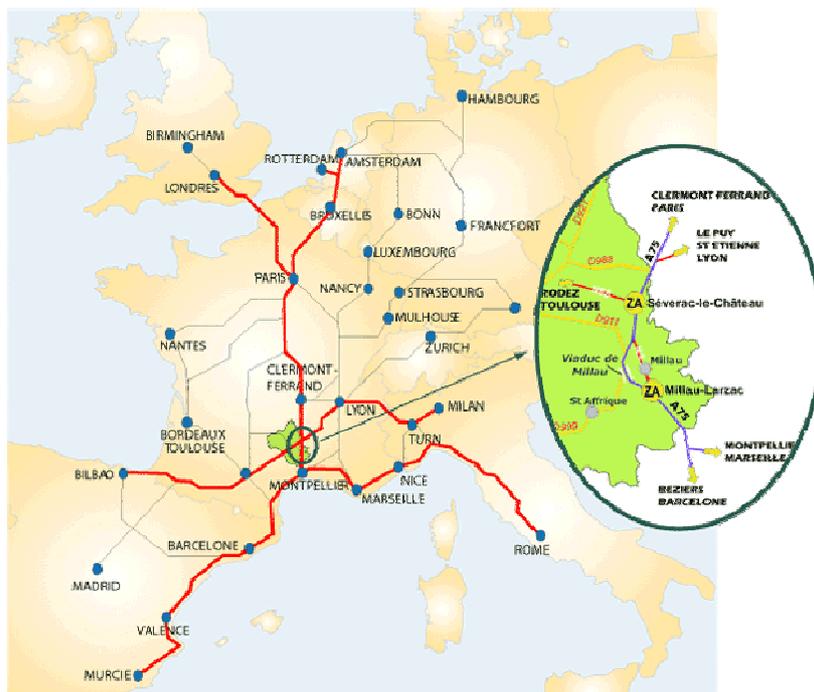


Figure A2 : Localisation du Viaduc de Millau

L'ouvrage cumule les records : c'est actuellement le pont routier le plus haut du monde avec l'ensemble pile-pylône le plus haut au monde (P2 : 343 m) et les deux piles les plus hautes au monde (P2 : 245 m et P3 : 221 m). Son tablier qui culmine à 270 m est également le plus haut pour un ouvrage routier et le plus long pour un pont haubané (2 460 m).

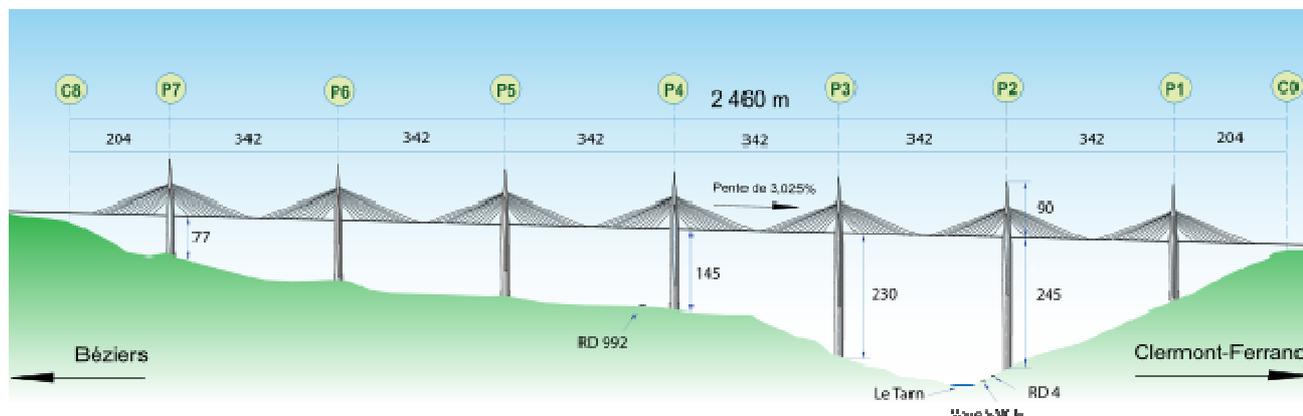


Figure A3 : Configuration du Viaduc de Millau

Dessiné par l'architecte britannique Sir Norman Foster, conçu par l'ingénieur français Michel Virlogeux, financé et réalisé par le groupe Eiffage, ce géant d'acier et de béton est aussi une fierté belge puisque c'est l'intervention du bureau d'études liégeois GREISCH et de son ingénieur Jean-Marie Crémer, qui a permis l'aboutissement de la construction de cet édifice hors normes. Par conséquent, outre que le Viaduc soit un des ponts à haubans les plus célèbres du monde, de part sa taille et ses dimensions, il présentait pour nous un intérêt majeur dans la mesure où il était un exemple du savoir-faire belge dans le domaine de la construction d'ouvrages d'art.

A la demande des français, le bureau Greisch a entrepris les études d'exécution du viaduc : les calculs et le suivi de toutes les phases de construction comme le spectaculaire lancement du tablier jusqu'à plus de 200 m au-dessus du sol, ainsi que les études complètes du viaduc en exploitation, avec, entre autres, une étude des vents, qui peuvent souffler à cet endroit jusqu'à 220 km/h et qui représentent une charge considérable sur le pont.



Figure A4 : Le bureau Greisch est intervenu à différents moments de la construction du Viaduc. Un véritable défi consistait au lancement et positionnement du tablier à 200 mètres d'altitude. Ici à gauche, les déformations calculées et à droite, les déformations réelles.

C'est un véritable exploit que l'équipe franco-belge réalisa pour construire le viaduc : la première pierre fut posée le 14 décembre 2001 et le viaduc fut ouvert à la circulation le 16 décembre 2004, soit 3 ans seulement après le début des travaux.

L'ouvrage multi-haubané est composé de sept piles minces et dédoublées sur leur partie supérieure, dont la hauteur varie de 78 mètres pour la pile P7 à 245 mètres pour la pile P2, et d'un tablier métallique très mince, large de 32 mètres et continu sur ses huit travées : deux travées de rive de 204 m de portée et six travées courantes de 342 m de portée chacune. Le tablier est suspendu au moyen de 7 séries de 11 paires d'haubans fixées à 7 pylônes en acier, d'une hauteur de 87 mètres chacun.

L'ouvrage est légèrement courbé, dessinant une trajectoire circulaire en plan de 20 km de rayon et en rampe constante de 3.025 % du nord vers le sud. Des structures de béton assurent l'appui du tablier à la terre ferme sur le Causse de Larzac d'un côté et le Causse rouge de l'autre.



Figure A5 : Le Viaduc présente une courbure d'un rayon de 20 km.

Aujourd'hui, plus de cinq millions de personnes empruntent le Viaduc de Millau chaque année. Outre les records, le viaduc cumule les succès : succès économique pour le développement de la région, succès technologique pour les méthodes qui ont été mises en place lors de son édification, succès environnemental pour sa parfaite intégration dans l'environnement, succès esthétique enfin puisqu'il est aujourd'hui admiré comme une œuvre d'art et même comme "la référence architecturale du début du XXIe siècle".



Figure A6 : Le Viaduc de Millau, une œuvre d'art.

XI. Annexe II : Fonctions hyperboliques

L'équation de la chaînette emploie une fonction qui n'est pas forcément au programme du cours de mathématiques à 6 périodes de l'enseignement général de transition : le cosinus hyperbolique.

Le cosinus hyperbolique est la fonction définie par : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

On lui associe le sinus hyperbolique : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

Les fonctions cosinus et sinus ordinaires s'appellent des fonctions circulaires parce que le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$ peut se paramétrer en $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

De façon analogue, la branche « droite » de l'hyperbole $x^2 - y^2 = 1$ peut quant à elle se paramétrer en $\begin{cases} x = ch t \\ y = sh t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

En effet, si M a pour coordonnées $(ch t, sh t), t \in \mathbb{R}$, on montre facilement que $ch t > 0$ et que $ch^2 t - sh^2 t = 1$.

Les analogies avec les fonctions trigonométriques circulaires sont nombreuses. Il est possible d'établir un formulaire hyperbolique semblable au formulaire de trigonométrie.

Voici les caractéristiques principales de ces fonctions :

