
Congrès Dédra-MATH-isons

UCL-FSA-2011



A la suite du nombre d'or, les métalliques

Par

CLARINVAL Mathilde -DELAISSE Thibault
DUCKERTS Guillaume -JACOB Thomas
JANSSENS Laurent -JASSOGNE Antoine
LALLEMAND Victoria -MARCHAIS Julie
MARS Arnaud -STAS Pierre
VILOUR Gaultier -VINCENT Jérôme

Encadrés par Mme Sabine DE BLIECK

Bien des choses ont été dites sur le nombre d'or, solution positive notée ϕ de l'équation $x^2=x+1$.

Afin d'étoffer un peu notre quincaillerie des nombres, nous sommes partis en quête d'un nombre d'argent, solution positive unique de $x^3=x^2+x+1$. Après en avoir montré l'existence et l'unicité, nous avons décidé d'en trouver une valeur exacte. Ce fut pour nous l'occasion de faire connaissance avec Cardan.

Puis, forts de nos succès, nous nous sommes pris à rêver : nombre d'or, nombre d'argent, et pourquoi pas un nombre de bronze ? Soyons fous ... Ne pourrions-nous pas imaginer toute une « fulltitude » de nombres de métal, solutions uniques positives de

$$X^n = \sum_{k=0}^{n-1} X^k \quad \text{où } n \in \mathbb{N}, n \geq 2 ?$$

Existent-ils vraiment ? Comment les approcher ? Comment les utiliser ? La suite qu'ils forment converge-t-elle ?... sont autant de questions que nous nous sommes posés dans cette aventure « Full métal Numbers ».

I.	Le nombre d'or et ses croyances	p.3
II.	Le nombre d'argent	p.9
III.	Résolution d'une équation de degré 3	p.11
IV.	Après l'or et l'argent, les autres métaux	p.15
V.	Etude de la suite des (α_n) , nombres métalliques	p.19
VI.	Applications des nombres métalliques	p.27
VII.	Conclusion	p.34
VIII.	Bibliographie	p.35



I. Le nombre d'or et ses croyances

Nombre d'or, Section dorée, Divine proportion, ... le Nombre d'Or représente une telle curiosité mathématique qu'on a fini par lui prêter des pouvoirs magiques. Bien que notre travail ne lui soit pas exclusivement consacré, nous avons pris le parti de vous en rappeler quelques formes de définition ainsi que plusieurs propriétés esthétiques qu'on lui attribue.

a) Définition du nombre d'or

— Algébrique d'abord :

$$\boxed{\text{Le nombre d'or est l'unique solution positive de l'équation } x^2-x-1=0. \quad (1)}$$

La résolution de cette équation nous amène les valeurs $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ mais nous ne considérons que la solution positive approchant : 1,618 033 988 749 894 848 204 586 834 365 638 117 720 309 179 805 762 862 135 448 622 705 260 462 189 024 497 072 072 041 (100 premières décimales), soit **1,618...** et qui est notée Φ . (phi) en hommage au sculpteur grec Phidias qui s'en serait servi dans les proportions du Parthénon à Athènes.

— Géométrique ensuite :



Le nombre d'or est la proportion définie comme l'unique rapport entre deux longueurs a et b ($a > b$) telles que le rapport de la somme des deux longueurs (a+b) sur la grande (a) soit égal à celui de la plus grande (a) sur la plus petite (b), c'est-à-dire :

$$\boxed{\Phi = \frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}} \quad (2)$$

Et nous remarquons en développant que (2) devient :

$$\boxed{\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}} \quad \text{ou encore} \quad \Phi^2 - \Phi - 1 = 0.$$

— Nombre d'or en fraction et racine continue

Nous avons vu dans la précédente définition, que l'équation $x^2-x-1=0$ pouvait devenir $x = 1 + \frac{1}{x}$

En reportant l'expression de x obtenue à la place du x au dénominateur, on obtient le développement en fraction continue du nombre d'or.

$$x = 1 + \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}}} \dots$$



Ces fractions continues nous permettent de trouver des nombres fractionnaires qui s'approchent de plus en plus du nombre d'or.

Voici les premières fractions réduites du nombre d'or :

$$- 1 + \frac{1}{1} = 2$$

$$- 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} = \frac{3}{2}$$

$$- 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}} = \frac{5}{3}$$

$$- 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}} = \frac{8}{5}$$

$$- 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}} = \frac{13}{8}$$

Nous voyons apparaître une suite de quotients liés aux nombres de la suite de Fibonacci qui sera traitée plus loin dans ce dossier.

De façon analogue, nous pouvons obtenir un développement en racines continues.

En effet : $x^2 - x - 1 = 0$ est équivalent à $x^2 = x + 1$

Et puisque nous nous intéressons à la solution positive de cette équation ($x > 0$), nous avons :

$$x = \sqrt{1+x} = \sqrt{1+\sqrt{1+x}} = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+x}}} = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+x}}}} = \dots$$

b) Construire le nombre d'or

Il existe plusieurs façons amusantes de construire un segment de longueur équivalente à Φ . Nous avons opté pour la plus simple.

Dessignons un triangle rectangle de côtés

$$\overline{AB} = 1 \text{ et } \overline{BC} = 2.$$

Selon le théorème de Pythagore,

$$\overline{AC}^2 = 1^2 + 2^2 = 5, \text{ soit } \overline{AC} = \sqrt{5}.$$

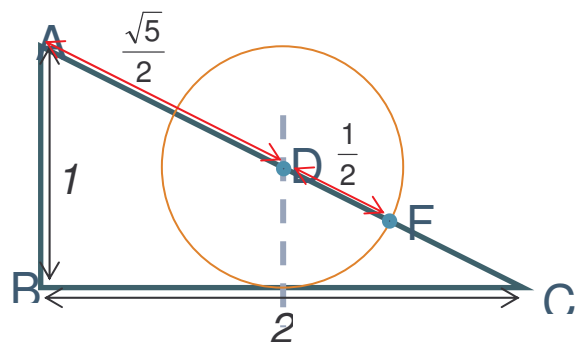
Prenons alors D tel que $\overline{AD} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Dessignons ensuite un cercle de centre D et de rayon $\frac{1}{2}$. L'intersection du cercle avec AC donne F tel que

$$\overline{DF} = \frac{1}{2}.$$

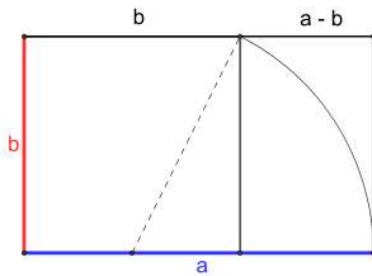
Ajoutons les deux segments trouvés

$$\overline{AD} + \overline{DF} = \overline{AF} = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} = \Phi$$



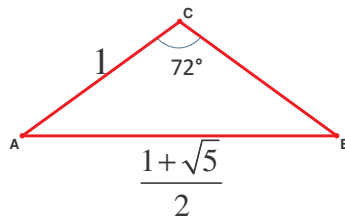
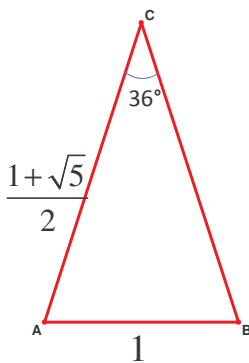
c) Nombre d'or en géométrie

— Le rectangle d'or



Un rectangle d'or est un rectangle tel que le rapport $\frac{\text{longueur}}{\text{largeur}} = \Phi^1$.

— Le triangle d'or



Un triangle d'or est un triangle isocèle dont les longueurs des côtés sont dans le rapport du nombre d'or.

On peut montrer facilement avec les relations trigonométriques dans le triangle qu'il existe deux triangles d'or: leurs angles mesurent 36° et 72° .

Cela vient du fait que la trigonométrie peut aussi être dorée :

$$\cos(36^\circ) = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} = \frac{\Phi}{2}$$

Effectivement,

En utilisant les valeurs associées,

Posons $36^\circ = x$

$$\cos(36^\circ) - \cos(72^\circ) = 2\sin(54^\circ) \sin(18^\circ)$$

$$\cos(36^\circ) - \cos(72^\circ) = 2 \cos(36^\circ) \cos(72^\circ).$$

$$\cos x - \cos 2x = 2 \cos x \cos 2x$$

$$\cos x - 2 \cos^2 x + 1 = 2 \cos x [2 \cos^2 x - 1]$$

$$\cos x - 2 \cos^2 x + 1 = 4 \cos^3 x - 2 \cos x$$

$$4 \cos^3 x + 2 \cos^2 x - 3 \cos x - 1 = 0$$

$$\cos x = -1$$

$$\cos x = \frac{1 - \sqrt{5}}{4}$$

$$\cos x = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} \text{ qui est la seule à conserver.}$$

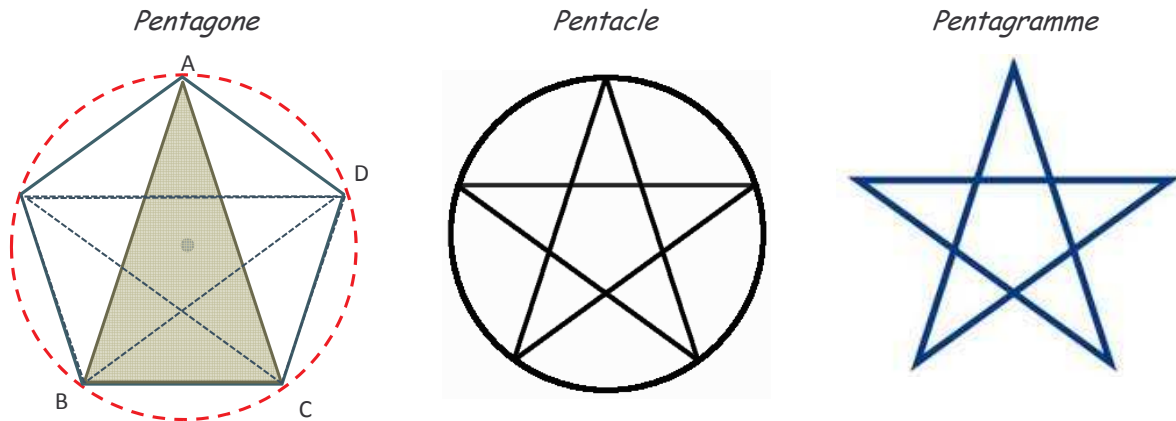
Donc,

$$\cos(36^\circ) = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} = \frac{\phi}{2}$$

¹ Se référer à la section « Applications des nombres métalliques », p.27



— Le pentagone et le nombre d'or

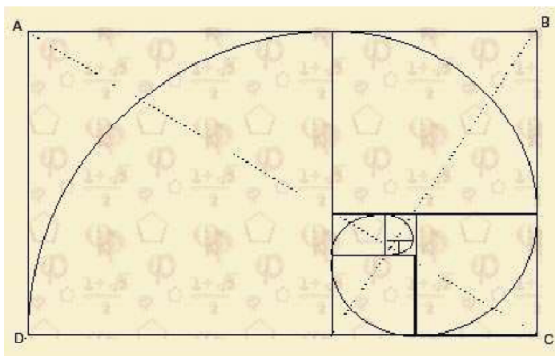


Parmi les figures sacrées de la géométrie, le pentacle est un grand classique. Si le pentagone régulier est un polygone à cinq cotés inscrits dans un cercle et dont tous les cotés et tous les angles ont même mesure, le pentacle est un pentagramme encerclé, c'est-à-dire une étoile à 5 branches régulières entourée d'un cercle.

Le pentagone régulier est intimement lié au nombre d'or. En effet, chaque angle mesure 108° . Nous observons aussi que les triangles qui constituent le pentagone sont des triangles d'or (triangles ABC et triangles ACD)..

Par conséquent, la proportion entre la diagonale et un côté du pentagone régulier est égale au nombre d'or : $\frac{AC}{CD} = \phi$.

— La spirale d'or



La spirale est construite à partir d'un grand rectangle d'or ABCD.

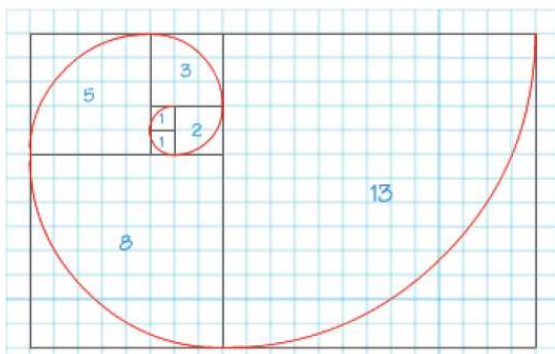
On retire le grand carré au grand rectangle d'or et on obtient un petit rectangle d'or.

Ensuite, on retire le petit carré au petit rectangle d'or et on obtient un rectangle d'or plus petit.

On réitère l'opération indéfiniment.

Les diagonales des rectangles se coupent au même point qui est le point limite de la spirale.

Les côtés des carrés correspondent à une suite de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13... comme le montre la figure ci-contre.



d) Mythes du nombre d'or

Il existe bien des croyances sur le nombre d'or mais est-ce un mythe ou une réalité ? On le retrouverait partout : dans l'architecture, dans la nature, dans la peinture ... Le nombre d'or serait même à l'origine d'une tentative d'eugénisme au début du vingtième siècle².

— Dans l'architecture



Pyramide de Kheops

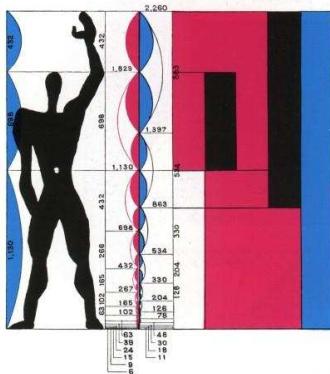


Parthénon

Selon les scientifiques, les premières manifestations du nombre d'or arriveraient il y a un peu plus de 10000 ans dans l'architecture du temple d'Andros découvert sous la mer des Bahamas. Un peu plus récente, la célèbre pyramide de Khéops (2880 av JC) aurait des dimensions qui mettent en évidence l'importance que son architecte attachait au nombre d'or.

Certains estiment également que le Parthénon (V AC) s'inscrirait dans un rectangle d'or.

— Dans la peinture :



Le Modulor
Le Corbusier



Salvator dali
La Cène

Le nombre d'or ne serait bien sûr pas utilisé qu'en architecture, plusieurs artistes peintres auraient fait une allusion à ce fameux nombre, parfois de façon affirmée comme Dalí, Picasso ou Le Corbusier qui construit son Modulor, sur la « règle d'or » selon laquelle les proportions du corps humain et l'esthétisme obéissent au nombre d'or.

² A lire dans « Le nombre d'or à la portée de tous », DOM NEROMAN (Maurice ROUGIE), 1946.

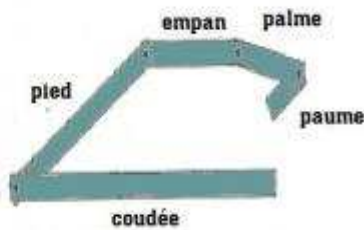
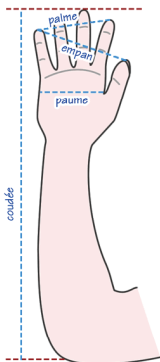


— Dans la nature :

Certains voient (souvent à tort) le nombre d'or dans la croissance des plantes ou des animaux : forme en spirale du nautilus, disposition des pétales de fleurs, agencement des branches sur une tige, répartition des écailles sur un ananas ou une pomme de pin.



— Chez l'homme :

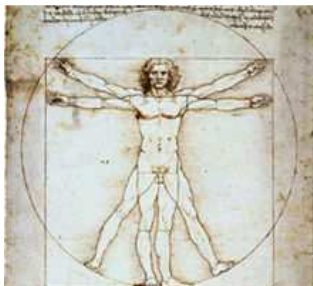


Au moyen âge, les bâtisseurs de cathédrales utilisaient une pignone constituée de cinq tiges articulées, correspondant chacune à une unité de mesure de l'époque, relatives au corps humain : la paume, la palme, l'empan, le pied et la coudée.

Les longueurs étaient données en lignes, une ligne mesurant environ 2 mm (précisément 2,247 mm).

Pour passer d'une mesure à la suivante, on peut constater que l'on multiplie par environ 1,618. Certains y voient donc un rapport équivalent au nombre d'or !

paume	34 lignes	7,64 cm
palme	55 lignes	12,63 cm
empan	89 lignes	20 cm
pied	144 lignes	32,36 cm
coudée	233 lignes	52,36 cm



Le célèbre croquis « L'homme de Vitruve » est d'ailleurs supposé illustrer de façon emblématique le rôle du nombre d'or dans les proportions du corps humain. En réalité, il est basé sur un cercle, un carré et des divisions en quarts et en huitièmes. Léonard de Vinci ne mentionne d'ailleurs pas cette proportion lorsqu'il traite de la composition du corps humain.

Nombre d'or, mythe ou réalité ? Nous ne participerons pas à la polémique. Le nombre d'or possède, comme beaucoup de nombres, des propriétés étonnantes d'un point de vue mathématique, et c'est cet aspect que nous avons décidé d'observer : une beauté mathématique.



II. Le nombre d'argent

a) Nos intentions

L'importance donnée au nombre d'or nous pousse à nous poser la question suivante : « Pourquoi pas un nombre d'argent ? ».

En effet, si on définit le nombre d'or comme solution positive unique de l'équation

$$x^2=x+1$$

Nous pourrions définir le nombre d'argent comme solution positive unique de l'équation

$$x^3=x^2+x+1 \quad (1)$$

Ce nombre existe-t-il ? Est-il unique ? Nous allons répondre à ces deux questions dans cette partie du travail.

b) Approche graphique

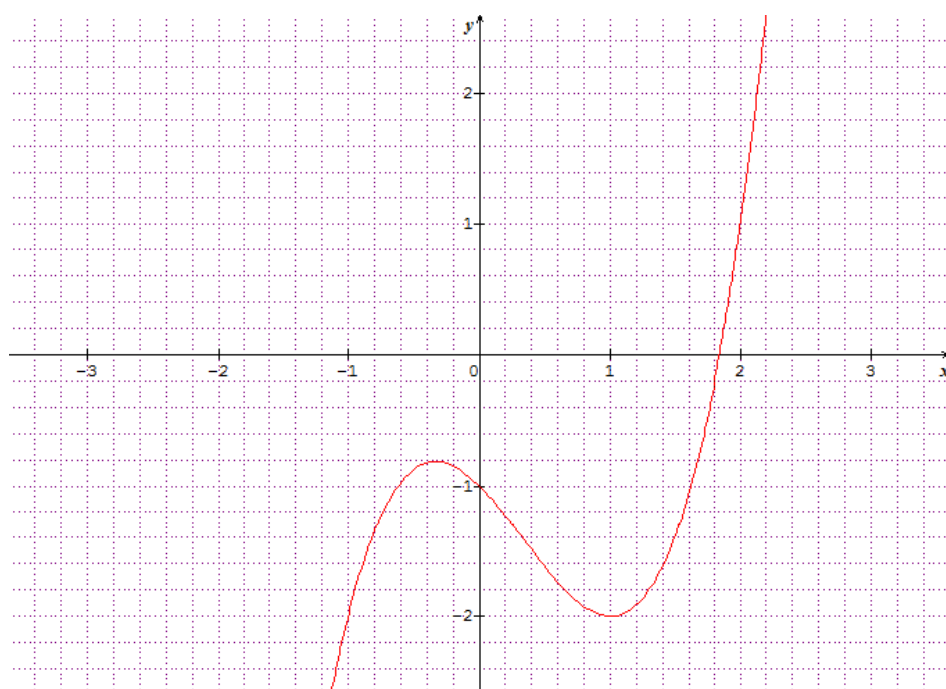
Afin de faciliter notre travail nous allons tout d'abord modifier quelque peu l'équation (1) :

$$x^3-x^2-x-1=0$$

Nous constatons dès lors que nous ne disposons dans l'état actuel de nos connaissances d'aucune méthode de résolution adéquate (la factorisation étant impossible et la méthode de Horner, même sous sa forme généralisée, ne donnant aucun résultat).

Nous allons donc tenter de visualiser notre problème en représentant la fonction

$$f(x)=x^3-x^2-x-1$$



Nous constatons qu'il y a bien une racine unique positive. Nommons-la α_3 (3 car elle correspond à une fonction polynomiale du troisième degré).

Nous pouvons également estimer que $\alpha_3 \in]1 ; 2[$.



c) Démonstrations

Essayons maintenant de démontrer nos observations afin de leur accorder une vraie valeur. Il nous faudra tout d'abord prouver l'existence de la racine positive et ensuite prouver qu'elle est bien unique.

1. Existence d'une racine positive.

Pour démontrer l'existence de la racine nous allons utiliser un théorème très important en analyse : le théorème des valeurs intermédiaires. Voici son énoncé :

« Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, une application continue, alors pour tout réel u compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = u$. »

Nous allons utiliser ici un cas particulier connu sous le nom de *Théorème de Bolzano*:

« Si $f(a)$ et $f(b)$ ne sont pas de même signe, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = 0$ (car 0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$). »

Or, pour notre fonction $f(x) = x^3 - x^2 - x - 1$, nous constatons que

- $f(0) = -1$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Nous pouvons également affirmer que notre fonction est continue car elle est polynomiale. D'après le théorème de Bolzano, il existe donc bien une valeur réelle $\epsilon \in]0 ; +\infty[$ dont l'image est 0 . Donc, notre nombre d'argent α_3 , racine positive de l'équation (1) existe.

2. Unicité de cette racine positive.

Pour prouver l'unicité de notre racine α_3 , nous allons étudier la variation de la fonction f définie plus haut.

Commençons par calculer sa dérivée : $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$.

Attardons nous quelque peu sur cette dérivée et réalisons son tableau de variation.

x		$\frac{-1}{3}$		1	
f'(x)	+	0	-	0	+
f(x)	↗	Maximum	↘	Minimum	↗
		$\left(\frac{-1}{3}, \frac{-22}{27}\right)$		(1, -2)	

Notre fonction admet donc un minimum en 1 valant -2. La croissance de la fonction nous montre bien qu'il ne peut y avoir qu'une seule racine entre 1 et $+\infty$.

Nous avons donc prouvé l'unicité de α_3 .

Si on en estime la valeur approchée par dichotomie (cf. Section IV), nous avons une idée plus précise du nombre d'argent avec $\alpha_3 \in]1,839 ; 1,840[$.



III. Résolution d'une équation de degré 3

Rechercher la valeur exacte du nombre d'argent consiste à résoudre une équation polynomiale du troisième degré.

Or, il existe une méthode de résolution pour toutes les équations du 3° degré.

a) La méthode de Cardan

La méthode de Cardan a été proposée en 1545 par Jérôme Cardan. Elle permet de prouver que toute équation du 3° degré de type $ax^3+bx^2+cx+d=0$ est résoluble par radicaux, de la même façon

qu'une équation du second degré se résout par $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, quitte à introduire des nombres imaginaires.

Nous allons donc tenter de vous expliquer le principe de cette méthode en procédant parallèlement à la résolution de notre « équation d'argent » : $x^3-x^2-x-1=0$

Soit à résoudre

$$ax^3+bx^2+cx+d=0$$

Nous allons tout d'abord poser

$$x = z - \frac{b}{3a}$$

On obtient donc une équation de la forme :

$$z^3+pz+q=0 \quad (1)$$

où $p = \frac{-b^2}{3a^2} + \frac{c}{a}$ et $q = \frac{b}{27a} \left(\frac{2b^2}{a^2} - \frac{9c}{a} \right) + \frac{d}{a}$

Ensuite nous allons poser

$$z=u+v$$

u et v étant 2 complexes et on développe l'équation qui devient dès lors

$$u^3+v^3+(3uv+p)(u+v)+q=0$$

Cette écriture nous confronte cependant à des conditions de simplification

- $u^3+v^3=-q$
- $uv = \frac{-p}{3}$ qui élevé au cube donne
- $u^3v^3 = \frac{-p^3}{27}$

$$x^3-x^2-x-1=0$$

Pour notre équation nous allons donc poser

$$x = z + \frac{1}{3}$$

ce qui nous donne

$$z^3 - \frac{4z}{3} - \frac{38}{27} = 0$$

Ce qui pour notre équation donne :

$$u^3+v^3+(3uv-\frac{4}{3})(u+v)-\frac{38}{27} = 0$$

Soit

- $u^3+v^3=\frac{38}{27}$
- $u^3v^3=\frac{64}{729}$



Nous nous retrouvons dès lors à la recherche de 2 nombres u^3 et v^3 dont nous connaissons la somme et le produit.

L'équation que nous tentons de résoudre n'est plus que :

$$X^2 - SX + P = 0 \rightarrow X^2 - \frac{38}{27}X + \frac{64}{729} = 0 \quad (2)$$

On en déduit donc que :

$$u = \sqrt[3]{\frac{19}{27} + \frac{\sqrt{33}}{9}} \rightarrow u = \frac{1}{3} \sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}}$$

$$\rightarrow u \sim 1.103$$

$$v = \sqrt[3]{\frac{19}{27} - \frac{\sqrt{33}}{9}} \rightarrow v = \frac{1}{3} \sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}}$$

$$\rightarrow v \sim 0.4029$$

Il ne nous reste désormais plus qu'à remplacer ces réponses afin de découvrir notre variable x de départ :

$$z = u + v \rightarrow z = \frac{1}{3} (\sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}})$$

$$\rightarrow z \sim 1.5059$$

$$x = z - \frac{b}{3a} \rightarrow x = \frac{1}{3} (\sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}} + 1)$$

$$\rightarrow x \sim 1.839$$

x est donc notre nombre d'argent.

$$\gamma = \frac{1}{3} (\sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}} + 1)$$

b) La méthode de Cardan et les imaginaires

Dans la résolution de l'équation, nous n'avons considéré que la solution réelle. Or, nous savons qu'un polynôme de degré n admet n racines dans \mathbb{C} .

Par ailleurs, la recherche de la racine réelle peut amener un discriminant à l'équation (2) négatif.

Dans le plan de Gauss, les trois racines de l'équation se trouvent au sommet d'un triangle équilatéral inscrit dans un cercle centré à l'origine, de rayon égal à $|z_0|$ où z_0 est la racine réelle de (1).

Pour être complet à propos de la méthode de Cardan, nous devons distinguer plusieurs cas en

fonction de la valeur du discriminant $\Delta = q^2 + \frac{4}{27} p^3$.



– Si $\Delta > 0$

L'équation possède alors une solution réelle et deux complexes.

En effet, u et v admettent 3 valeurs possibles dans \mathbb{C} :

$$u^3 = \frac{-q + \sqrt{\Delta}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} u_0 = \sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{\Delta}}{2}} \\ u_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} \sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{\Delta}}{2}} \\ u_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} \sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{\Delta}}{2}} \end{cases} \text{ et } v^3 = \frac{-q - \sqrt{\Delta}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} v_0 = \sqrt[3]{\frac{-q - \sqrt{\Delta}}{2}} \\ v_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} \sqrt[3]{\frac{-q - \sqrt{\Delta}}{2}} \\ v_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}} \sqrt[3]{\frac{-q - \sqrt{\Delta}}{2}} \end{cases}$$

Mais comme le produit $uv = \frac{-p}{3}$, nous ne pouvons les associer que de la façon suivante pour trouver les trois racines :

$$\begin{cases} z_0 = u_0 + v_0 \\ z_1 = u_1 + v_2 \\ z_2 = u_2 + v_1 \end{cases}$$

La seule solution réelle est alors $z_0 = u_0 + v_0$. Les deux autres solutions sont complexes conjuguées.

L'équation $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$ répond à ce cas particulier. Outre le nombre d'argent, nous avons les solutions complexes conjuguées :

$$x_1 = \frac{1}{3} \left(\sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}} e^{i\frac{2\pi}{3}} + \sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}} e^{i\frac{4\pi}{3}} + 1 \right)$$

$$x_2 = \frac{1}{3} \left(\sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}} e^{i\frac{2\pi}{3}} + \sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}} e^{i\frac{4\pi}{3}} + 1 \right)$$

– Si $\Delta = 0$

Un discriminant nul se traduit par :

$$q^2 + \frac{4}{27} p^3 = 0 \Leftrightarrow \frac{27q^2}{4p^3} = -1 \Leftrightarrow \frac{27q^3}{8p^3} = -\frac{q}{2} \Leftrightarrow \frac{3q}{2p} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}}$$

Dans le paragraphe précédent, appliquons $\Delta = 0$ dans la formule donnant u_0 et v_0 , on obtient pour z_0 :

$$z_0 = 2\sqrt[3]{\frac{-q}{2}} = \frac{3q}{p}$$



Faisons de même dans la formule donnant u_1 et u_2 ainsi v_1 et v_2 du paragraphe précédent, on obtient :

$$z_1 = z_2 = \left(e^{\frac{i2\pi}{3}} + e^{\frac{i4\pi}{3}} \right) \sqrt[3]{\frac{-q}{2}}$$

Or, $e^{\frac{i2\pi}{3}} + e^{\frac{i4\pi}{3}} = -1$. Donc
$$z_1 = z_2 = -\sqrt[3]{\frac{-q}{2}} = \frac{-3q}{2p}$$

L'équation possède alors deux solutions réelles, une simple et une double :

— **Si $\Delta < 0$**

L'équation (2) a alors pour racine :

$$u^3 = \frac{-q + i\sqrt{|\Delta|}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} u_0 = \sqrt[3]{\frac{-q + i\sqrt{|\Delta|}}{2}} \\ u_1 = e^{\frac{i2\pi}{3}} \sqrt[3]{\frac{-q + i\sqrt{|\Delta|}}{2}} \\ u_2 = e^{\frac{i4\pi}{3}} \sqrt[3]{\frac{-q + i\sqrt{|\Delta|}}{2}} \end{cases} \text{ et } v^3 = \frac{-q - i\sqrt{|\Delta|}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} v_0 = \sqrt[3]{\frac{-q - i\sqrt{|\Delta|}}{2}} \\ v_1 = e^{\frac{i2\pi}{3}} \sqrt[3]{\frac{-q - i\sqrt{|\Delta|}}{2}} \\ v_2 = e^{\frac{i4\pi}{3}} \sqrt[3]{\frac{-q - i\sqrt{|\Delta|}}{2}} \end{cases}$$

Mais, comme vu précédemment, la condition $uv = \frac{-p}{3}$ nous impose uniquement les 3 solutions :

$$\begin{cases} z_0 = u_0 + v_0 \\ z_1 = u_1 + v_2 \\ z_2 = u_2 + v_1 \end{cases}$$

Nous remarquons que chaque valeur de z s'obtient en ajoutant deux nombres complexes conjugués. En effet, par exemple pour z_1 ,

$$\overline{u_1} = e^{\frac{i2\pi}{3}} \sqrt[3]{\frac{-q + i\sqrt{|\Delta|}}{2}} = e^{\frac{-i2\pi}{3}} \sqrt[3]{\frac{-q + i\sqrt{|\Delta|}}{2}} = e^{\frac{i4\pi}{3}} \sqrt[3]{\frac{-q - i\sqrt{|\Delta|}}{2}} = v_2$$

Par conséquent ces valeurs sont des nombres réels.



c) D'autres méthodes de résolution d'équations de degré 3 et plus

Il existe bien d'autres méthodes de résolution d'équation polynomiale de degré 3. Citons par exemple la méthode de Sotta (Bernard Sotta - 1956-...).

Un élève de Cardan, Ludovico Ferrari (1522-1565) permit la résolution d'équations de degré 4 le premier. Léonhard Euler (1707-1783) et Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) en proposèrent d'autres.

Plusieurs mathématiciens tentèrent de trouver une résolution aux équations de degré 5, tels Etienne Bézout (1730-1783), mais aucune tentative n'aboutit.

C'est le jeune Evariste Galois (1811-1832) qui établit les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une équation polynomiale ait des solutions qui s'expriment avec des radicaux.

Une théorie des mathématiques porte son nom : « La théorie de Galois » .

IV. Après l'or et l'argent, les autres métaux

a) Enoncé du problème

Après avoir démontré l'existence du nombre d'argent, solution réelle positive unique de

$$x^3 = x^2 + x + 1$$

Nous pouvons de façon générale nous interroger sur l'existence et l'unicité d'une solution réelle positive de l'équation

$$x^n = \sum_{k=0}^{n-1} x^k \quad \text{où } n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \quad (1)$$

b) Approche graphique

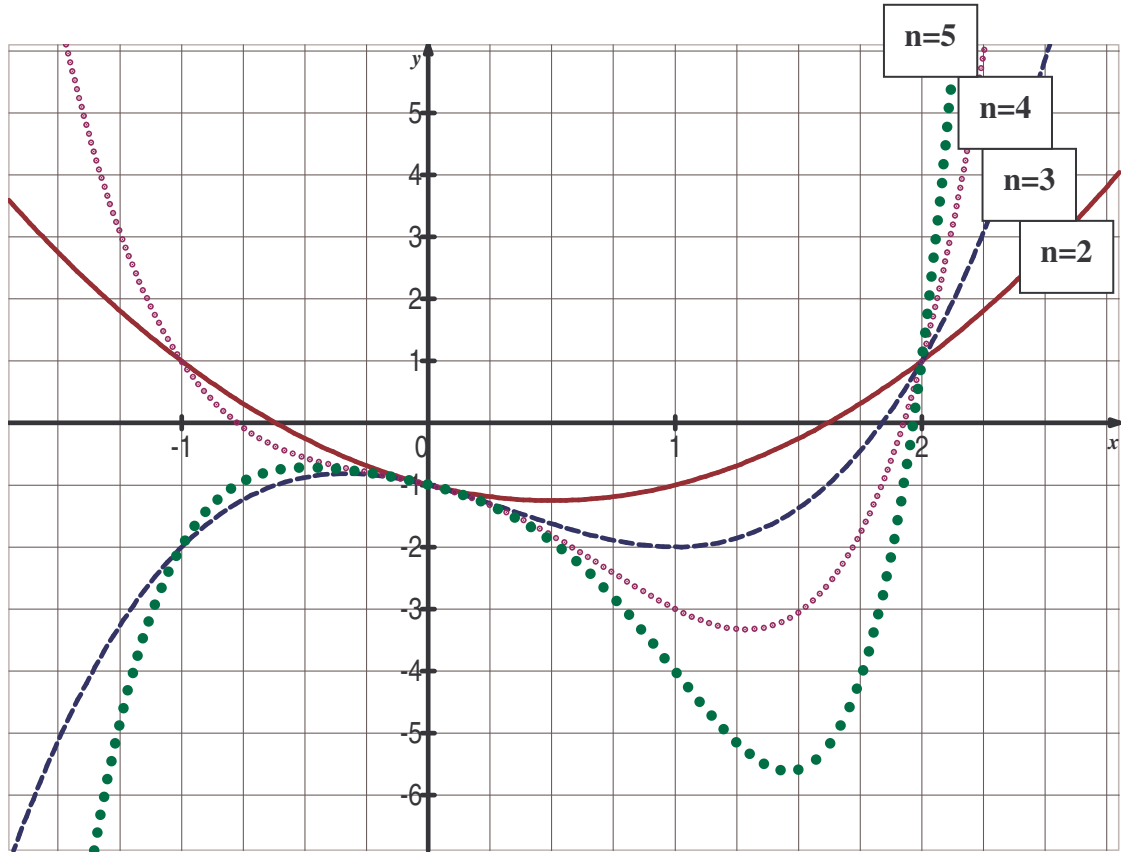
Observons d'abord graphiquement ce qu'il se passe ...

Soit la fonction définie pour $n \in \mathbb{N}$ ($n \geq 2$) :

$$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto x^n - \sum_{k=0}^{n-1} x^k$$



Nous avons représenté ci-dessous les graphes de ces fonctions f_n , pour différentes valeurs de n .



Nous constatons que

1. Si n est pair, $f_n(-1) = 1$
2. Si n est impair, $f_n(-1) = -2$
3. Pour n'importe quelle valeur de n , $f_n(0) = -1$
4. Pour n'importe quelle valeur de n , $f_n(1) = 1 - n$
5. Pour n'importe quelle valeur de n , $f_n(2) = 1$

Nous observons aussi :

- L'existence d'une racine unique que nous nommons α_n .
- Que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ est croissante et tend vers 2 si n augmente.
- Les fonctions f_n admettent un minimum négatif sur \mathbb{R}^+ .



c) Tableau de quelques valeurs approchées de α_n

Nous avons approché à 10^{-3} quelques valeurs des racines α_n par la méthode de la dichotomie.

n=	α_n =	n=	α_n =
2	1,618	6	1,984
3	1,839	7	1,992
4	1,928	8	1,996
5	1,966	9	1,998

L'évolution des α_n confirme bien l'observation graphique. Mais une observation ne suffit pas. Nous allons démontrer l'existence d'une unique racine positive de la fonction f_n , racine dénommée « *nombre de métal* ».

d) Existence d'une racine positive

Nous faisons référence au **théorème de Bolzano** déjà cité en page 10. $f_n(x)$ est une fonction polynôme, donc continue sur \mathbb{R} .

Par ailleurs, $f_n(0) = -1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^n - \sum_{k=0}^{n-1} x^k \right) = +\infty$.

Nous pouvons donc dire que : $\exists c \in]0; +\infty[\mid f_n(c) = 0$.

Nous avons démontré l'existence d'une racine positive.

e) Unicité de la racine positive

L'existence d'une racine positive étant prouvée, il nous reste à prouver son unicité.

Pour commencer, nous pouvons réécrire l'équation (1) sous une autre forme.

$$x^n = \sum_{k=0}^{n-1} x^k \quad (1)$$

$$x^n = \frac{x^n - 1}{x - 1} \quad \text{si } x \neq 1 \quad (2)$$

Le membre de gauche de (1) pouvant être interprété comme la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison x et de premier terme 1.

$$\text{Ou encore } x^n - \frac{x^n - 1}{x - 1} = \frac{x^{n+1} - 2x^n + 1}{x - 1} \quad \text{si } x \neq 1$$



La fonction f_n décrite précédemment s'écrit alors

$$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \begin{cases} \frac{x^{n+1} - 2x^n + 1}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 - n & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Nous avons exclu 1 comme racine potentielle de f_n ($f_n(1)=1-n$) ; nous pouvons donc nous contenter de démontrer l'unicité d'une racine pour la fonction

$$g_n(x) = x^{n+1} - 2x^n + 1$$

(α_n est racine de f_n ssi elle est racine de g_n).

Nous allons étudier la croissance de g_n .

$$g_n'(x) = (n+1)x^n - 2nx^{n-1} = 0 \Leftrightarrow g_n'(x) = x^{n-1}((n+1)x - 2n)$$

Nous constatons que g_n' admet 2 racines : 0 et $\frac{2n}{n+1}$.

Voici le tableau de variation de la fonction g_n :

x		0		1		$\frac{2n}{n+1}$	
x^{n-1}	-	0	+	+	+	+	+
$(n+1)x - 2n$	-	-	-	-	-	0	+
$g_n'(x)$	+	0	-	-	-	0	+
$g_n(x)$		Max				Min	

Nous constatons, que $\frac{2n}{n+1}$ est un minimum, négatif ($f_n(\frac{2n}{n+1}) < f_n(1)=1-n < 0$), donc la fonction est strictement croissante après ce point. Cela signifie que la racine positive α_n dont nous avons prouvé l'existence est unique et appartient à l'intervalle $]\frac{2n}{n+1}, +\infty[$.

f) Démonstration de nos diverses observations graphiques

La réécriture de f_n nous permet de montrer aisément que

— Observation n° 5 : $f_n(2)=1$

$$\text{En effet, } f_n(2) = \frac{2^{n+1} - 2 \cdot 2^n + 1}{2 - 1} = \frac{2^{n+1} - 2^{n+1} + 1}{2 - 1} = 1$$

— Observation n° 1: $f_n(-1) = 1$ si n est pair

$$\text{En effet, si } n \text{ est pair } f_n(-1) = \frac{(-1)^{n+1} - 2 \cdot (-1)^n + 1}{-1 - 1} = \frac{-1 - 2 + 1}{-1 - 1} = 1$$

— Observation n° 2 : $f_n(-1) = -2$ si n est impair

$$\text{Si } n \text{ est impair, } f_n(-1) = \frac{(-1)^{n+1} - 2 \cdot (-1)^n + 1}{-1 - 1} = \frac{1 + 2 + 1}{-1 - 1} = -2$$



V. Etude de la suite des (α_n) , nombres métalliques

Dans cette partie, nous allons observer en tant que suite les nombres métalliques, dont l'existence a été prouvée dans la section précédente par nos éminents camarades chercheurs.

Rappelons que :

- α_2 est le nombre d'or, unique solution positive de $x^2 = x + 1$.
- α_3 est le nombre d'argent, unique solution positive de $x^3 = x^2 + x + 1$.
- α_4 est le nombre de bronze, unique solution positive de $x^4 = x^3 + x^2 + x + 1$.
- α_n , unique solution positive de $x^n = \sum_{k=0}^{n-1} x^k$.

Nous allons d'une part conjecturer d'une formule d'approximation des α_n en fonction de n et d'autre part, montrer que la suite des (α_n) est croissante et convergente vers 2.

a) Méthode de Newton-Raphson.

Nous avons déjà utilisé la dichotomie pour approcher numériquement ces différentes valeurs de α_n . Après quelques brèves investigations, la méthode de Newton-Raphson nous est apparue comme une alternative intéressante à explorer.

Voici en quelques lignes l'explication de cette méthode portant le nom des mathématiciens anglais Isaac Newton et Joseph Raphson (17^{ème} siècle), qui furent les premiers à la décrire pour l'appliquer à la recherche des racines d'une équation polynomiale.

Etant donné une fonction, continue et dérivable sur un intervalle I dans lequel se situe la racine recherchée. Pour approcher la racine, cette méthode utilise la tangente au graphe de la fonction en un point x_0 , grossière approximation de la racine. Voici l'équation de cette tangente :

$$t_0 = y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

L'intersection de la tangente avec l'axe Ox va nous donner un point x_1 , que nous allons utiliser comme point d'abscisse de la nouvelle tangente.

La tangente intercepte l'axe Ox en un point x_1

$$x_1 = \frac{-f(x_0)}{f'(x_0)} + x_0$$

Nous pouvons à nouveau calculer l'équation d'une nouvelle tangente au graphe de f en x_1 :

$$t_1 \equiv y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$$

Dont l'intersection avec Ox va nous donner un second point, x_2 , que nous utiliserons comme point d'abscisse pour la tangente, et ainsi de suite.

Nous obtenons une formule de récurrence qui va nous approcher de la racine.

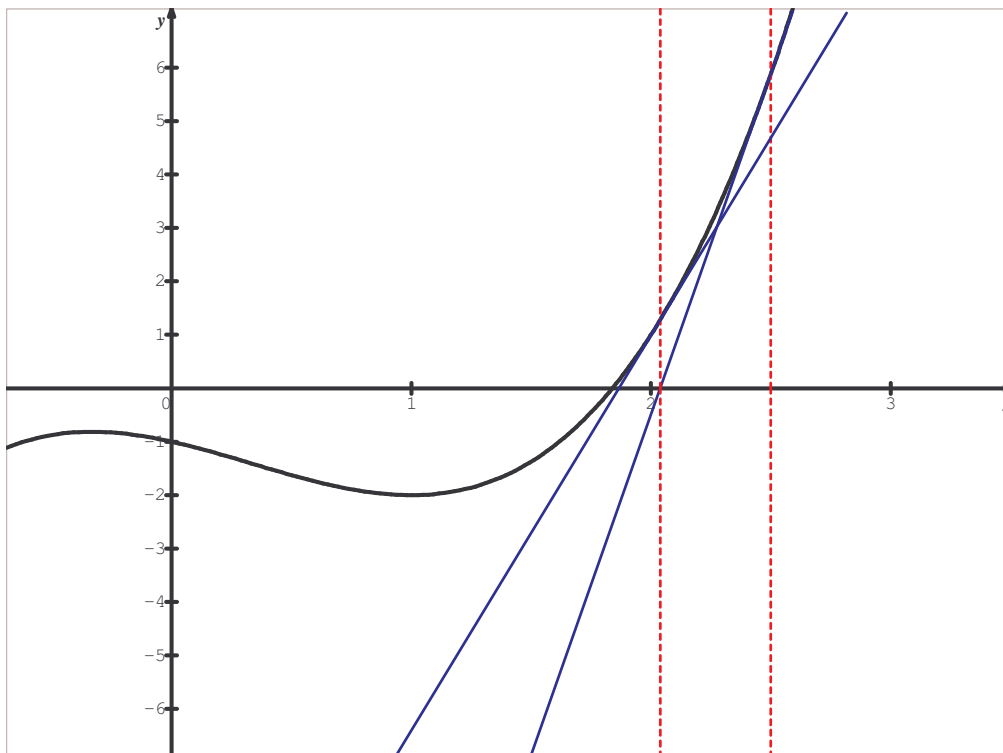


$$x_{n+1} = \frac{-f(x_n)}{f'(x_n)} + x_n$$

Algébriquement parlant, cette méthode nécessite le calcul de la dérivée première en tout point x_n et que celle-ci soit non nulle. Ainsi, ce procédé ne fonctionne pas toujours. Ainsi, si la fonction présente un extremum local, il y a un risque que la méthode ne converge pas, car la valeur de la dérivée est nulle en un extremum et le nouveau point à l'infini.

Comme nous pouvons observer sur le dessin, les valeurs successives des points d'intersection des tangentes avec l'axe Ox tendent vers la valeur réelle de notre racine.

Nous pouvons donc répéter cette méthode jusqu'à l'obtention d'une valeur satisfaisante.



Voici les valeurs approchées à 10^{-5} par cette méthode pour $n=2, 3, 4, 5$ et 6 :

- $a_2 \approx 1,61803$
- $a_3 \approx 1,83929$
- $a_4 \approx 1,92756$
- $a_5 \approx 1,96595$
- $a_6 \approx 1,98440$



b) Etude de la suite des α_n , suite

Nous avons déjà souligné que les valeurs approchées et les graphes des fonctions f_n définies dans le chapitre précédent montrent que les α_n forment une suite croissante et tendent vers une même valeur réelle 2.

Nous allons donc démontrer ces deux points, c'est-à-dire :

$$1) \alpha_{n+1} > \alpha_n \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$$

$$2) \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 2$$

— Montrons que la suite (α_n) est croissante, c'est-à-dire que

$$\alpha_{n+1} > \alpha_n$$

Pour ce faire, nous utilisons la fonction g_n décrite plus tôt

$$g_n(x) = x^{n+1} - 2x^n + 1$$

Par définition de α_n ,

$$g_n(\alpha_n) = 0$$

Calculons

$$g_n(\alpha_{n+1}) = \alpha_{n+1}^{n+1} - 2\alpha_{n+1}^n + 1 = \alpha_{n+1}^n(\alpha_{n+1} - 2) + 1 \quad (1)$$

Or, nous savons également, comme vu plus haut, que α_n vérifie l'équation suivante,

$$g_n(\alpha_n) = 0 \Leftrightarrow \alpha_n^{n+1} - 2\alpha_n^n + 1 = 0$$

soit, après regroupement et mise en évidence, $\alpha_n^n(2 - \alpha_n) = 1$.

Pour la même raison, mais à un degré supérieur,

$$\alpha_{n+1}^{n+1}(2 - \alpha_{n+1}) = 1$$

Soit, comme $\alpha_{n+1} \neq 0$,

$$\alpha_{n+1}^n(2 - \alpha_{n+1}) = \alpha_{n+1}^{-1} \quad (2)$$

Donc, en plaçant (2) dans (1)

$$g_n(\alpha_{n+1}) = 1 - \frac{1}{\alpha_{n+1}}$$

Ce calcul nous donne une valeur positive car $\alpha_{n+1} > 1$ (montré en page 17).

Par conséquent,

$$g_n(\alpha_{n+1}) > g_n(\alpha_n) = 0.$$



Or, nous avons montré que g_n était strictement croissante sur $\left] \frac{2n}{n+1}, +\infty \right[$. En outre, $\alpha_{n+1} \in \left] \frac{2n}{n+1}, +\infty \right[$ car $\frac{2n}{n+1} < \frac{2(n+1)}{n+2}$. Cela signifie que $\alpha_n < \alpha_{n+1}$.

— Montrons que la suite (α_n) converge vers 2

Maintenant que nous avons démontré que les α_n constituent une suite croissante, nous allons prouver qu'ils tendent à l'infini vers une même valeur réelle, 2. Autrement dit, dans le langage mathématique,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 2$$

Nous pouvons montrer que α_n appartient à $\left] \frac{2n}{n+1}, 2 \right[$ en invoquant à nouveau le théorème de Bolzano cité plus haut.

En effet, nous avons montré que $f_n\left(\frac{2n}{n+1}\right) < 0$ et que $f_n(2)=1$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2n}{n+1} \right) = 2$$

Ceci révèle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 2$.

2 serait donc nombre métallique lorsque $n \rightarrow +\infty$! Extraordinaire quand on a pu prouver que $f_n(2)=1$!

c) Recherche de formules d'approximation.

L'objet de cette section est de pouvoir trouver une fonction d'approximation de la racine α_n en fonction de n . Ceci nous permettrait d'éviter les méthodes d'analyse numérique pour connaître chaque racine. Cette recherche s'effectuera en deux temps : d'abord, nous observerons graphiquement l'évolution des α_n afin d'associer le graphe obtenu à un graphe de référence, ensuite, nous nous baserons sur la méthode de Newton-Raphson pour trouver une fonction d'approximation satisfaisante.

Etude expérimentale

Nous posons $\beta_n = 2 - \alpha_n$ puis nous représentons les valeurs de β_n dans un nuage de points afin de trouver une fonction de modélisation $\beta_n = b(n)$.

Voici les valeurs approchées à 10^{-5} de β_n pour $n=2, 3, 4, 5$ et 6 :

— $\beta_2 \approx 0,382$

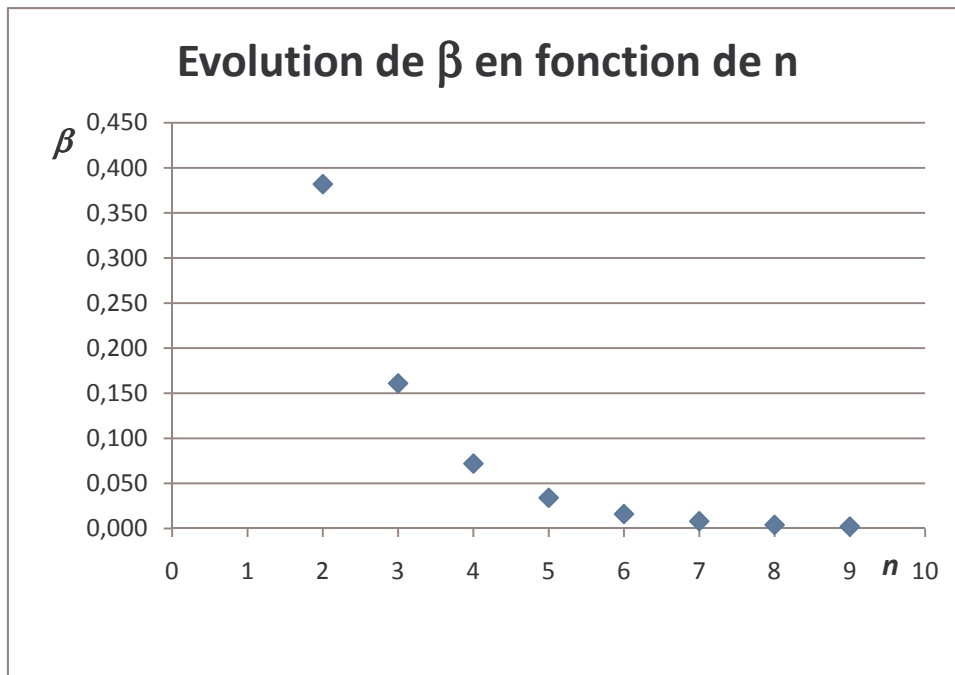
— $\beta_3 \approx 0,161$

— $\beta_4 \approx 0,072$

— $\beta_5 \approx 0,034$

— $\beta_6 \approx 0,016$





Nous pouvons constater que le graphe est apparenté à 2 fonctions de références

n^{-a} ou a^{-n} où a serait un paramètre à définir.

Pour le vérifier, nous calculons le rapport $\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n}$:

n	β_n	β_{n+1}	β_n/β_{n+1}
2	0,382	0,161	2,373
3	0,161	0,072	2,236
4	0,072	0,034	2,118
5	0,034	0,016	2,125
6	0,016	0,008	2,000
7	0,008	0,004	2,000
8	0,004	0,002	2,000

Nous observons un rapport constant ≈ 2 , qui nous indique une évolution de type exponentielle a^{-n} .

En effet, si

$$\frac{\beta_n}{\beta_{n+1}} = \frac{n^{-a}}{(n+1)^{-a}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{-a} \quad \text{rapport non constant}$$

$$\frac{\beta_n}{\beta_{n+1}} = \frac{a^{-n}}{a^{-n-1}} = a \quad \text{rapport constant}$$

Nous pouvons dès lors écrire $\beta_{n+1} = \frac{\beta_n}{2}$ soit $\beta_n \approx \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot k$ k étant une constante à découvrir.



Recherche formelle

Les calculs avec la méthode numérique de Newton-Raphson nous donnent une formule permettant de calculer la racine au départ d'une première approximation.

Nous allons utiliser cette méthode avec différentes fonctions ayant pour racine unique positive α_n et dont les formes découlent de la fonction initiale f_n , en prenant comme valeur de départ $x_0 = 2$.

Nous utiliserons les fonctions déjà utilisées :

1. $g_n(x) = x^{n+1} - 2x^n + 1$
2. $f_n(x) = \frac{x^{n+1} - 2x^n + 1}{x - 1}$

Et une troisième :

3. $h_n(x) = \frac{1}{x^n} + x - 2$

L'emploi de cette dernière fonction se justifie de la façon suivante :

$$\frac{x^{n+1} - 2x^n + 1}{x - 1} = 0 \xrightarrow{x \neq 1} x^{n+1} - 2x^n + 1 = 0 \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow x^n(x - 2) + 1 = 0 \xrightarrow{x \neq 0} 2 - x = \frac{1}{x^n} \Leftrightarrow \frac{1}{x^n} + x - 2 = 0$$

1. Formule obtenue au départ de $g_n(x) = x^{n+1} - 2x^n + 1$

Par Newton-Raphson,

$$\alpha_n \approx 2 - \frac{g_n(2)}{g_n'(2)}$$

Or $g_n(2) = 1$

Et

$$\begin{aligned} g_n'(x) &= (n+1)x^n - 2nx^{n-1} \\ \Rightarrow g_n'(2) &= (n+1) \cdot 2^n - n \cdot 2^n = 2^n \end{aligned}$$

Soit, nous avons notre première forme d'approximation de α_n :

$$\alpha_n \approx 2 - \frac{1}{2^n}$$

Ce qui veut dire que $\beta_n \approx 2 - (2 - \frac{1}{2^n}) \approx \frac{1}{2^n}$. Nous retrouvons la forme que nous avons pressentie en page 23, avec une constante $k=1$.



Nous pouvons montrer que cette approximation est faite par excès :

$$\alpha_n < 2 - \frac{1}{2^n}$$

Nous savons que $g_n(x)$ est croissante. Nous devons juste étudier le signe de $g_n\left(2 - \frac{1}{2^n}\right)$.

$$g_n\left(2 - \frac{1}{2^n}\right) = (2 - 2^{-n})^{n+1} - 2(2 - 2^{-n})^n + 1$$

$$g_n\left(2 - \frac{1}{2^n}\right) = (2 - 2^{-n})^n \cdot (2 - 2^{-n} - 2) + 1$$

$$g_n\left(2 - \frac{1}{2^n}\right) = -\frac{(2 - 2^{-n})^n}{2^n} + 1$$

$$g_n\left(2 - \frac{1}{2^n}\right) = -\underbrace{(1 - 2^{-(n+1)})^n}_{<.1} + 1 > 0$$

Donc

$$g_n\left(2 - \frac{1}{2^n}\right) > g_n(\alpha_n) = 0$$

Soit

$$2 - \frac{1}{2^n} > \alpha_n$$

2. Formule obtenue au départ de $f_n(x) = \frac{x^{n+1} - 2x^n + 1}{x - 1}$

Nous recommençons la procédure pour $f_n(x)$.

$$\alpha_n \approx 2 - \frac{f_n(2)}{f_n'(2)}$$

$$f_n(2) = 1.$$

$$f_n'(x) = \frac{[(n+1)x^n - 2nx^{n-1}](x-1) - x^{n+1} + 2x^n - 1}{(x-1)^2}$$

$$f_n'(2) = \frac{2^n - 1}{1}$$

Et voici notre deuxième forme d'approximation de α_n :

$$\alpha_n \approx 2 - \frac{1}{2^n - 1}$$

Avec

$$\beta_n \approx \frac{1}{2^n - 1}$$



3. Formule obtenue au départ de $h_n(x) = \frac{1}{x^n} + x - 2$

Nous recommençons la procédure pour $h_n(x)$.

$$\alpha_n \approx 2 - \frac{h_n(2)}{h_n'(2)}$$

$$h_n(2) = \frac{1}{2^n}$$

$$h_n'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}} + 1 \rightarrow h_n'(2) = \frac{2^{n+1} - n}{2^{n+1}}$$

Soit, une troisième forme d'approximation de α_n :

$$\alpha_n \approx 2 - \frac{2}{2^{n+1} - n}$$

Voici un tableau présentant les valeurs trouvées pour chacune des fonctions d'approximation.

n	α_n	α_{1n}	ϵ_1	α_{2n}	ϵ_2	α_{3n}	ϵ_3
2	1,618	1,750	8,16%	1,667	3,01%	1,667	3,01%
3	1,839	1,875	1,96%	1,857	0,99%	1,846	0,39%
4	1,928	1,938	0,49%	1,933	0,28%	1,929	0,03%
5	1,966	1,969	0,14%	1,968	0,09%	1,966	0,01%
6	1,984	1,984	0,02%	1,984	0,01%	1,984	0,00%
7	1,992	1,992	0,01%	1,992	0,01%	1,992	0,00%
8	1,996	1,996	0,00%	1,996	0,00%	1,996	0,00%
9	1,998	1,998	0,00%	1,998	0,00%	1,998	0,00%

On constate que la troisième fonction est une approximation de la racine offrant l'erreur relative la plus petite.



VI. Applications des nombres métalliques

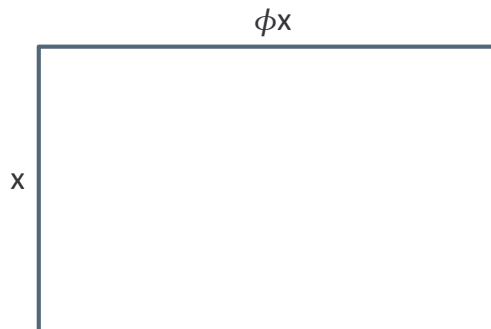
Dans cette section, nous avons adapté deux applications célèbres du nombre d'or aux nombres métalliques. Ceci nous a permis d'imaginer la brique d'argent, équivalent du rectangle d'or en dimension 3 et d'étudier les suites de k-bonacci.

a) Après le rectangle d'or, la brique d'argent

Tout d'abord, nous allons nous intéresser au rectangle d'or : de quoi s'agit-il ? Comment le construire ?

- Qu'est-ce qu'un rectangle d'or ?

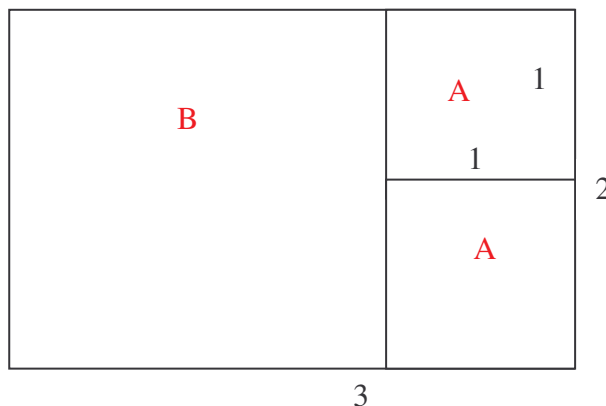
Un rectangle d'or est un rectangle dont le rapport $\frac{\text{longueur}}{\text{largeur}} = \Phi$, nombre d'or.

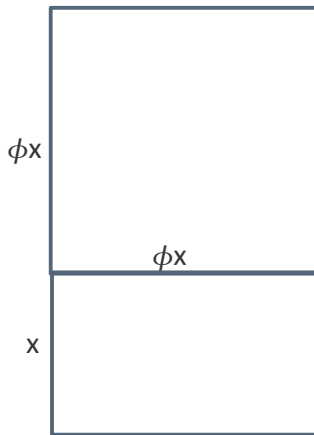


- Comment construire un rectangle d'or ?

Réalisons un carré de côté 1 (A), Nous le dédoublons afin d'obtenir un rectangle de longueur 2 et de largeur 1. Ensuite, nous accolons un carré de côté 2 (B) pour obtenir un rectangle de côté 3 et 2. Nous recommençons alors l'opération en accolant un carré de côté 3 au rectangle : la figure formée est un rectangle de côtés (5,3). Si nous continuons nous allons avoir des rectangles qui ont des dimensions telles que (3,2) ; (5,3) ; (8,5) ;... pour terminer avec un rectangle de côté (Φx,x).

Remarquez que la suite des dimensions obtenues 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... forme une suite de Fibonacci.





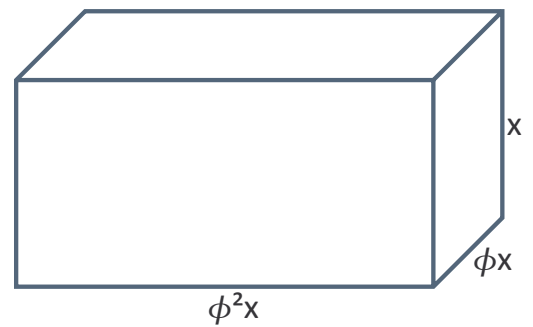
Par ailleurs, si on applique le même procédé de construction au départ d'un rectangle d'or de dimensions $(\Phi x, x)$, la figure obtenue de dimensions $((\Phi+1)x, \Phi x)$, est semblable au rectangle de départ car le rapport entre $(\Phi+1)x$ et Φx est égale au nombre d'or :

$$\frac{x(\Phi + 1)}{\Phi x} = \Phi$$

Car Φ est solution de $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$.

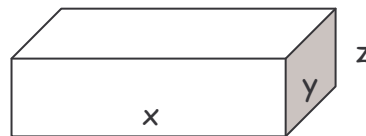
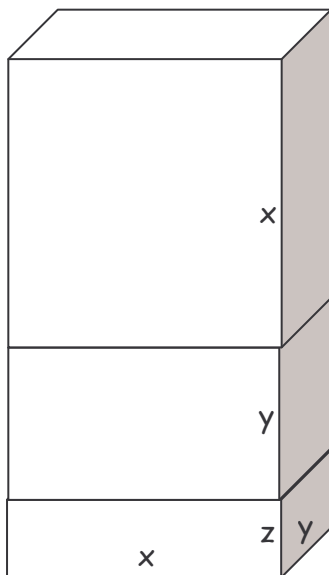
— Définition de la brique d'argent

Si nous avons construit un rectangle d'or, pourquoi ne pas construire une brique d'argent ?
 A l'instar du rectangle d'or, nous définissons la brique d'argent comme un parallélépipède dont les rapports $\frac{\text{longueur}}{\text{largeur}} = \frac{\text{largeur}}{\text{hauteur}} = \gamma$, nombre d'argent.



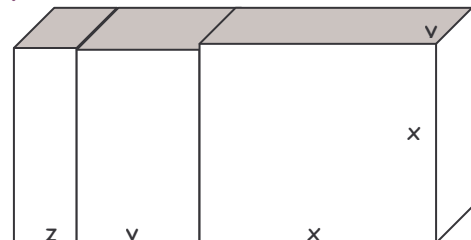
— Construction de la brique d'argent

Pour obtenir une brique d'argent, nous allons procéder au même mode de construction que pour le rectangle d'or.
 D'abord, nous posons une brique de longueur x , de largeur y et de hauteur z sur sa plus grande face ($x > y > z$). Nous désignerons la brique par le triplet de dimensions (x, y, z) .



Par-dessus, nous ajoutons une autre brique de base carrée de côté y et de longueur x : (x, y, y) .
 Enfin, une troisième brique aux dimensions (x, x, y) complète l'ensemble.

L'ensemble donne une brique que l'on pose sur sa plus grande face aux dimensions $(x+y+z, x, y)$.



Tout comme le rectangle d'or, une brique d'argent possède la propriété suivante :



Une brique d'argent obtenue par ce type de construction est semblable à sa mère, c'est-à-dire :

$$\frac{x+y+z}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \gamma$$

En effet, si on part d'une hauteur z dans la brique d'argent mère, nous pouvons écrire $y = \gamma.z$ et $x = \gamma^2.z$, car par définition, dans une brique d'argent (x, y, z) :

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \gamma$$

Soit donc la brique d'argent mère $(\gamma^2 z, \gamma z, z)$

Nous pouvons dire que la brique n°2 aura comme dimensions : $((\gamma^2 + \gamma + 1)z, \gamma^2 z, \gamma z)$.

Nous devons montrer :

$$\frac{(\gamma^2 + \gamma + 1)z}{\gamma^2 z} = \gamma$$

Et si nous simplifions ce rapport, nous trouvons une équation dont la solution positive est le nombre d'argent !

$$\gamma^3 - \gamma^2 - \gamma - 1 = 0$$

En outre, si une brique est d'argent, sa fille l'est aussi.

En effet, la brique n°1 a pour dimensions (x, y, z) , la n°2 a pour dimensions $(x+y+z, x, y)$.

On en déduit que la brique n°3 a pour dimensions $(2x+2y+z, x+y+z, x)$ et ainsi de suite...

Or on sait par la première propriété que

$$\frac{x+y+z}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \gamma$$

Montrons alors que

$$\frac{2x+2y+z}{x+y+z} = \frac{x+y+z}{x} \quad (1)$$

Posons alors

$$x = \gamma.y \quad \text{et} \quad x+y+z = \gamma.x.$$

Nous avons aussi

$$y = \frac{x}{\gamma} \quad \text{et} \quad z = \frac{y}{\gamma}.$$

(1) devient alors

$$1 + \frac{x+y}{x+y+z} = 1 + \frac{y+z}{x}$$

Ou en substituant

$$\frac{x \left(1 + \frac{1}{\gamma}\right)}{\gamma x} = \frac{y \left(1 + \frac{1}{\gamma}\right)}{\gamma y}$$

La brique d'argent constitue donc une version 3D du rectangle d'or. Peut-être pourrions-nous imaginer un hypercube de bronze ... Ce serait pour un autre congrès !



b) Fibonacci, tribonacci, ... k-bonacci

— La suite de Fibonacci

La célèbre **suite de Fibonacci** doit son nom au grand mathématicien italien du moyen âge Léonard de Pise, dit Fibonacci qui vécut au 12^e siècle.

C'est une suite de nombres, ni arithmétique ni géométrique, dans laquelle tout nombre (à partir du troisième) est égal à la somme des deux précédents. Elle se construit donc aisément par récurrence :

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (1)$$

Ce qui donne :

indice n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89

Le nom de suite de Fibonacci a été donné par l'arithméticien français Edouard Lucas en 1817, alors qu'il étudiait ce qu'on appelle aujourd'hui les "suites de Fibonacci généralisées" obtenues en changeant les deux premiers termes de la suite de Fibonacci et qui suivent le même procédé de construction.

La plus simple d'entre elles, dont les deux premiers termes sont 1 et 3, s'appelle aujourd'hui ... la suite de ... Lucas ! (Elle commence par 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, ...).

Remarquons que la récurrence (1) peut s'écrire aussi de façon matricielle :

$$\begin{pmatrix} F_{n+2} \\ F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix}$$

Et si on pose $U_n = \begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, cela devient : $U_n = A^n U_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$

Nous pouvons voir aisément que la relation de récurrence prend alors une forme matricielle :

$$U_n = U_{n-1} + U_{n-2} \quad \forall n \in \mathbb{N}, n > 1 \quad (2)$$

La suite de Fibonacci est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

Lorsqu'une suite est récurrente d'ordre 2, c'est-à-dire

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

où a et b ∈ IR(ou éventuellement ℂ) avec b non nul, on peut montrer que le terme général d'une telle suite est

$$u_n = \lambda x_1^n + \mu x_2^n$$

Où x₁ et x₂ sont deux racines distinctes du trinôme x² - ax - b.



Dans notre cas, $a=b=1$. x_1 et x_2 sont donc solutions de $x^2-x-1=0$. Nous sommes de nouveau sur les traces du nombre d'or. Nous avons déjà trouvé les solutions de $x^2-x-1=0$. Nous pouvons donc écrire :

$$F_n = \lambda \Phi^n + \mu \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Utilisant $F_0=0$ et $F_1=1$, nous trouvons $\lambda = \frac{1}{\sqrt{5}}$ et $\mu = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

Soit

$$F_n = \frac{\Phi^n}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Observons :

$$\lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ n \in \mathbb{N}}} \Phi^n = \lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ n \in \mathbb{N}}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n = +\infty \text{ car } \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1 \text{ tandis que } \lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ n \in \mathbb{N}}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n = 0 \text{ car } \left| \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right| < 1.$$

Nous pouvons en conclure que

$$\lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ n \in \mathbb{N}}} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ n \in \mathbb{N}}} \frac{\frac{\Phi^{n+1}}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}}{\frac{\Phi^n}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n} = \lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ n \in \mathbb{N}}} \frac{\Phi^{n+1}}{\Phi^n} = \Phi$$

Nous retrouvons ici une propriété majeure de la suite de Fibonacci : le rapport des quotients de deux termes consécutifs de la suite tend vers le nombre d'or lorsque n tend vers l'infini :

$$\lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ n \in \mathbb{N}}} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \Phi$$

De petits calculs rapides nous montrent en effet que les rapports suivants

$$13/8 = 1.625 ; 21/13 = 1.61538... ; 34/21 = 1.61904...$$

Tendent de plus en plus vers 1,618.

— Fibonacci, Tribonacci, tetrabonacci, ... k-bonacci

La suite de Tribonacci est directement liée à la suite de Fibonacci. En effet, dans la suite de Tribonacci, comme son nom le suggère, chaque terme est la somme des trois termes qui le précèdent. Ce qui donne la récurrence suivante :

$$\begin{cases} T_0 = 0 \\ T_1 = 1 \\ T_2 = 1 \\ T_{n+3} = T_{n+2} + T_{n+1} + T_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (1)$$



Ce qui donne :

<i>indice n</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
T_n	0	1	1	2	4	7	13	24	44	81	149	274

Comme pour la suite de Fibonacci, il est possible d'écrire la récurrence (1) de façon matricielle :

$$\begin{pmatrix} T_{n+3} \\ T_{n+2} \\ T_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{n+2} \\ T_{n+1} \\ T_n \end{pmatrix}$$

En posant $U_n = \begin{pmatrix} T_{n+2} \\ T_{n+1} \\ T_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$: $U_n = A^n U_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$

Pourrait-on imaginer dès lors que le nombre d'argent serait à la suite de Tribonacci ce que le nombre d'or est à la suite de Fibonacci ? Opérons la même recherche que précédemment :

La suite de Tribonacci est une suite récurrente linéaire d'ordre 3. Elle s'écrit en effet :

$$u_{n+3} = au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n$$

où a, b et c $\in \mathbb{R}$ (ou éventuellement \mathbb{C}). Par conséquent,

$$u_n = \lambda x_1^n + \mu x_2^n + \nu x_3^n$$

Où x_1, x_2 et x_3 sont les racines du polynôme $x^3 - ax^2 - bx - c$.

Dans notre cas, a=b=c=1. x_1, x_2 et x_3 sont donc solutions de $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$, dont nous avons étudié les racines à la section III (p. 11). Parmi celles-ci, nous retrouvons le nombre d'argent γ . Les deux autres sont des valeurs complexes conjuguées

$$x_1 = \frac{1}{3} \left(\sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}} e^{i\frac{2\pi}{3}} + \sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}} e^{i\frac{4\pi}{3}} + 1 \right)$$

$$x_2 = \frac{1}{3} \left(\sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}} e^{i\frac{2\pi}{3}} + \sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}} e^{i\frac{4\pi}{3}} + 1 \right)$$

Nous pouvons dès lors écrire : $T_n = \lambda \gamma^n + \mu x_1^n + \nu x_2^n$

Par ailleurs, nous observons que x_1 et x_2 ont des modules inférieurs à 1.

Nous obtenons donc que $\lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ n \in \square}} \frac{T_{n+1}}{T_n} = \lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ n \in \square}} \frac{\gamma^{n+1}}{\gamma^n} = \gamma$.

Pour cette raison, le nombre d'argent est parfois appelé constante de Tribonacci et les deux autres valeurs de l'expression (2), x_1 et x_2 , portent parfois l'appellation de nombres de Tribonacci.



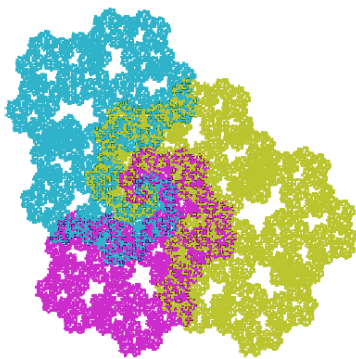
Et donc il existe tout comme pour la suite de Fibonacci, un lien avec le nombre d'argent 1,839 lorsque nous effectuons la division des deux nombres consécutifs de cette manière

$$13/7 = 1.857 ; 24/13 = 1.846 ; 44/24 = 1.833, 81/44=1,841, 149/81=1,840...$$

On rencontre la suite de Tribonacci à différents endroits dans le monde des mathématiques.

Par exemple, en dénombrement, on démontre que T_{n+1} est le nombre de façons de découper un saucisson de longueur n en tranches dont l'épaisseur peut varier entre 1, 2 ou 3.

Par ailleurs, elle est à la base de la construction du fractal de Rauzy qui procède en faisant intervenir une suite ressemblant à la suite de mots de Tribonacci.



$$s(1)=12, s(2)=23, s(3)=312$$

Du Tribonacci dans le fractal de Rauzy



Et dans le saucisson !?!

La suite de mots de Tribonacci est définie comme suit :

$$\begin{cases} M(1) = a \\ a \rightarrow ab \\ b \rightarrow ac \\ c \rightarrow a \end{cases}$$

Cela donne

a, ab, ab ac, ab ac ab a, ab ac ab a ab ac ab, ab ac ab a ab ac ab ab ac ab a ab ac,

On s'aperçoit ainsi que chaque mot est obtenu comme la concaténation des 3 mots précédents.

La longueur de ces mots répond dès lors à une suite de Tribonacci :

1 1 2 4 7 13 24 ...



En poussant le raisonnement encore plus loin, on étend les suites de Fibonacci aux suites de k-bonacci en définissant :

$$\begin{cases} K_0 = 0 \\ K_i = 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, k-1\} \\ K_n = \sum_{i=n-k}^{n-1} K_i \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq k \end{cases}$$

Illustrons ...

Indice	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\lim_{\substack{n \rightarrow +\infty \\ n \in \mathbb{N}}} \frac{K_{n+1}}{K_n}$
<i>Suite de tétranacci</i>	0	1	1	1	3	6	11	21	41	79	152	
<i>Suite des rapports K_{n+1}/K_n</i>				3	2	1,833	1,909	1,952	1,927	1,924	1,928	α_4
<i>Suite de pentanacci</i>	0	1	1	1	1	4	8	15	29	57	113	
<i>Suite des rapports K_{n+1}/K_n</i>				1	4	2	1,875	1,933	1,966	1,982	1,964	α_5
<i>Suite de hexanacci</i>	0	1	1	1	1	1	5	10	19	37	73	
<i>Suite des rapports K_{n+1}/K_n</i>				1	1	5	2	1,9	1,947	1,973	1,986	α_6

VII. Conclusion

Les « Full métal numbers » une innovation détonante qui va sauver le monde ?

« Full métal numbers », une épopée unique ?

En toute honnêteté, nous n'avons fait aucune découverte. Si la célébrité du nombre d'or ne fait aucun doute, vous n'aviez peut-être jamais entendu parler des nombres métalliques. Pourtant, il existe bien quelques lignes à leur sujet sur la toile, écrites par des amoureux des mathématiques.

Alors, notre quincaillerie, une simple contrefaçon ? Pas d'accord ! « Full métal numbers » fut une véritable ruée vers l'or pour nous, occasion de déterrer un trésor : exploitation des théorèmes sur la continuité, méthodes numériques d'approximation, conjectures, constructions, ... Alors, si nous ne pouvons nous attribuer la paternité de ce gisement précieux, nous sommes heureux d'avoir fait de ces nombres métalliques un moment mathématique et ludique.



VIII. Bibliographie

- BAEZ John C., *One-bonacci, Two-bonacci, Three-bonacci, Four...*, 2003, Département de mathématiques de l'Université de Californie.
- CHOULET R., *Après le nombre d'or, quels nombres aussi riches inventer ?*, 2007, Lycée Augustin Fresnel, Caen
- de LA HARPE P., *Le nombre d'or en mathématique*, 2008, Département de mathématiques de l'Université de Genève.
- HUVENT G., *Les nombres de Métal : alchimie mathématique de la transformation*, 2004, IREM de Lille.
- JOYAL A., *Algèbre*, 2003, Département de mathématiques de l'Université du Québec à Montréal.
- KLEIN H., *Méthode de Newton-Raphson*, 2009, « <http://www.cinam.univ-mrs.fr/klein/teach/mip/numeriq/node25.html> », consulté en octobre 2010.
- MAWHIN J., *Nombre d'or : beauté des mathématiques ou mathématiques de la beauté ?*, 2009, Université Catholique de Louvain.
- MAWHIN J., *Au carrefour des mathématiques, de la nature, de l'art et de l'ésotérisme : le nombre d'or*, 1998, Université Catholique de Louvain.
- PERRIN D., *La méthode de Cardan et les imaginaires*, Département de mathématiques de l'Université de Paris.
- SWOKOWSKI E.-W., *Analyse*, 1993, Ed. De Boeck.
- VILLEMEN G., *NOMBRES - Curiosités, théorie et usages*, 2010, <http://villemien.gerard.free.fr/Wwwgvmm/Geometri/NbOrCons.htm#carre>, consulté le 25 octobre 2010.
- WEISSTEIN ERIC W., *Tribonacci number*, <http://mathworld.wolfram.com/>, consulté le 5 février 2010.
- *Méthode de Newton-Raphson*, 2010, « http://fr.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9thode_de_Newton », consulté en octobre 2010.
- *Méthode de Cardan*, 2010, « http://fr.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9thode_de_Cardan », consulté en septembre 2010.

