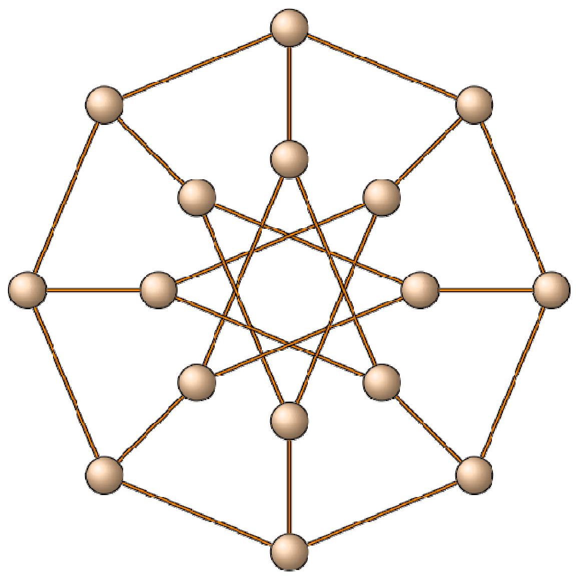
Congrès Dédra-MATH-isons

UCL-FSA - 2010

Gaston Lagraffe arrive,
Faites Graphe à vous!

7 dÈfis pour dÈcouvrir la théorie des graphes



Par

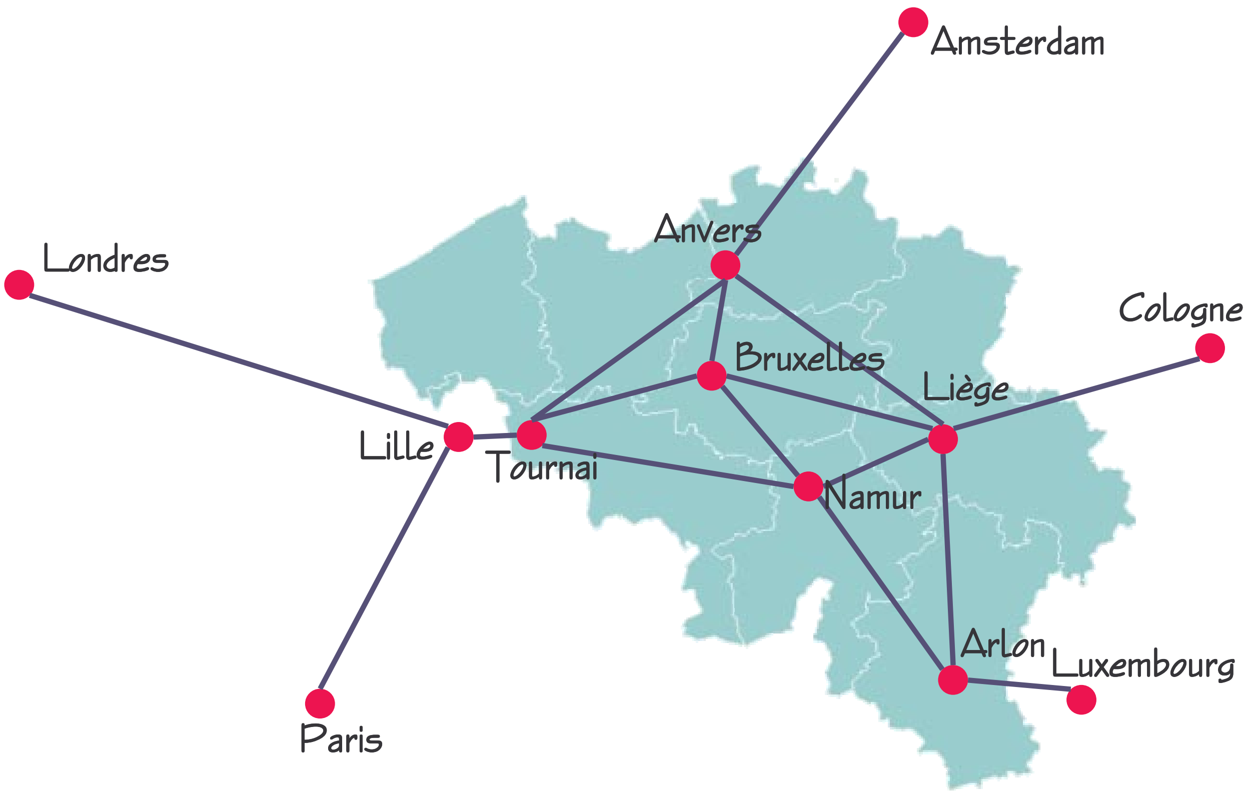
AMEEUW Fanchon
BODART Arnaud
BRICHEUX Jurgen
COLLIN Pauline
DE BRUYCKER Tinia
GENGLER Noémie
HENIN Jean-Baptiste
LEBOUTTE Pierre
MAKHLOUFI Manon
PIERARD Jonathan
RICHARD Mégane
SEVRIN Elodie
SOYEUR François
VANDENBOSSCHE Jeroen
WALHIN William
XHIGNESSE Thomas

Enseignant : Mme Sabine DE BLIECK

Institut Saint-Laurent Marche-en-Famenne

Les Graphes modélisent de nombreuses situations concrètes où interviennent des objets en interaction.

- Les interconnections routières, ferroviaires ou aériennes entre différentes agglomérations,
- Les liens entre les composants d'un circuit électronique,
- Le plan d'une ville et de ses rues en sens unique,…
- En chimie, en biologie, en écologie, en sciences sociales, l'organisation des services de secours,…



Le réseau ferroviaire est une application concrète de la théorie des graphes.

Les graphes permettent de manipuler plus facilement des objets et leurs relations avec une représentation graphique naturelle. L'ensemble des techniques et outils mathématiques mis au point en théorie des graphes permet de démontrer facilement des propriétés, d'en déduire des méthodes de résolution, des algorithmes,….Par exemple :

- Quel est le plus court chemin (en distance ou en temps) pour se rendre d'une ville à une autre ?
- Comment minimiser la longueur totale des connexions d'un circuit ?
- Peut-on mettre une rue en sens unique sans rendre impossible la circulation en ville ?
- Comment organiser un horaire d'occupation ?
- …

Un graphe permet de décrire un ensemble d'objets et leurs relations, c'est-à-dire les liens entre les objets.

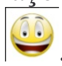
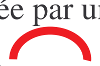
Voici sept petits défis pour découvrir pas à pas la matière de la théorie des graphes.

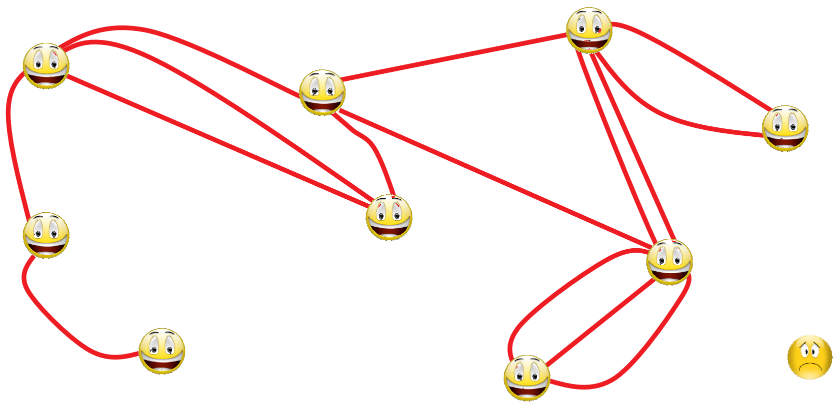
Problème n°1

En Belgique, on ne se fait qu'une fois la bise, en, France, 2, 3, 4 fois, cela dépend de…heu, bref, le nombre de personnes qui ont habité la terre et qui ont donné un nombre impair de bises est-il pair ou impair ?

1. Modélisation en termes de graphe

Notre problème peut se visualiser de la façon suivante. Imaginons dix personnes dans une pièce.

chaque personne est représentée par un . Ces personnes s'embrassent : chaque « bise » peut être symbolisée par une connexion  : certaines personnes s'embrassant une fois, deux fois, trois fois, elles pourront être reliées par une, deux ou trois connexions.



Nous venons de créer un **graphe** à 10 **sommets** représentant les personnes nommés de 1 à 10, comportant 15 **arêtes** représentant les bises.

2. Un peu de vocabulaire

Un **graphe** est défini par deux ensembles :

- un ensemble X= $\{x_1 ; x_2 ; \ldots x_n\}$ dont les éléments sont appelés **sommets**,
- et un ensemble A= $\{a_1 ; a_2 ; \ldots a_m\}$, dont les éléments sont appelés **arêtes**.

On le note G= (X ;A).

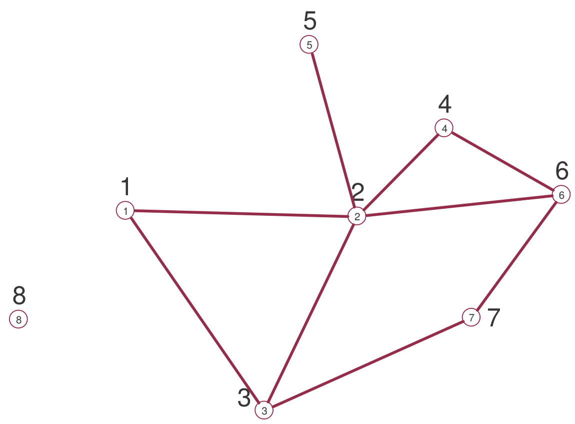
Une **arête** a est une paire de sommets (x, y) (=ce qui relie deux sommets entre eux).

Les sommets ***x*** et ***y*** sont les **extrémités** de l'arête.

Deux sommets d'un graphe sont **voisins** ou **adjacents** s'ils ont au moins une arête incidente en commun.

Deux arêtes d'un graphe sont **adjacentes** si elles ont au moins un sommet en commun.

On appelle **ordre** d'un graphe le nombre de sommets de ce graphe.



Voici un exemple de graphe d'ordre 8 comportant 8 sommets (X={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}) et 9 arêtes (A= ={(1,2), (1,3),(2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (4,6), (6,7),(3,7)})

Le nombre d'arêtes **incidentes** à un sommet est le nombre d'arêtes sortant ou rentrant du sommet.

Le **degré** d'un sommet x de G est le nombre d'arêtes incidentes à x. Il est noté d(x).

Lorsque d(x)=0, on dit que le sommet x est **isolé**.

Lorsque d(x)=1, on dit que le sommet x est **pendant**.

Lorsque plusieurs arêtes relient deux sommets, on les appelle des **arêtes multiples.**

Une **boucle** est une arête dont les deux extrémités sont identiques.

Dans notre exemple, 3 arêtes sont incidentes au sommet 6, soit le degré de ce sommet vaut 3 : d(6)=3.

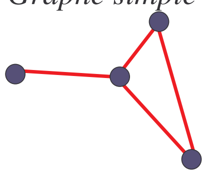
8 est un sommet isolé : d(8)=0
5 est pendant : d(5)=1.

3. Différents types de graphes.

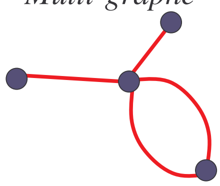
Graphe simple et multigraphe

Un graphe est **simple** s''il ne contient ni boucle ni arêtes multiples. Un **multi-graphe** est un graphe qui n'est pas simple.

Graphe simple



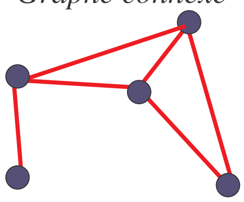
Multi-graphe



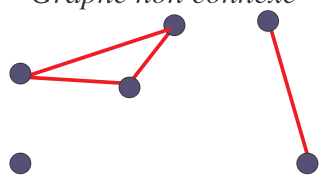
Graphe connexe.

Un graphe est **connexe** s'il est possible à partir de n'importe quel sommet, de rejoindre tous les autres en suivant les arêtes.

Graphe connexe



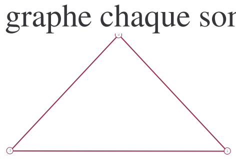
Graphe non connexe



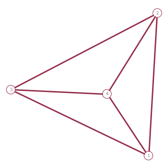
Graphe complet.

Un graphe **complet** est un graphe où chaque sommet est relié à tous les autres. Le graphe complet d'ordre **n** est noté $\mathbf{K_n}$. Dans ce graphe chaque sommet est de degré **n-1.**

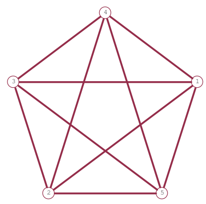
K_2



K_3



K_4



K_5

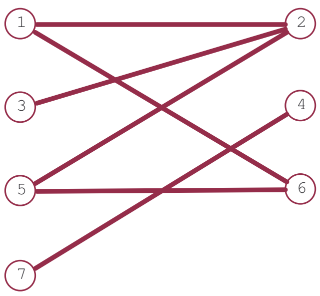
✘ *Graphe biparti(te)*

Un graphe G(X, A) est biparti ou **bipartite** si l’ensemble de ses sommets X peut être divisé en deux ensembles A et B, de sorte que

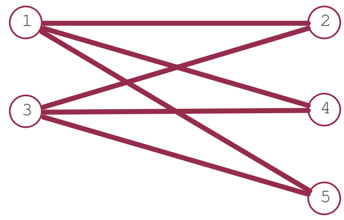
- Les éléments de A ne sont reliés entre eux par aucune arête ;
- Les éléments de B ne sont reliés entre eux par aucune arête.

Les arêtes relient uniquement des éléments de A à des éléments de B.
Un graphe **bipartite complet** G(X,A), noté $K_{p,q}$, est un graphe bipartite où chaque sommet de A est relié à tous les sommets de B par une arête soit $X=\{x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots y_q\}$ et $A=\{(xi,yj) \mid 1\leq i\leq p$ et $1\leq j\leq q\}$.

Graphe bipartite



Graphe bipartite complet de type $K_{2,3}$

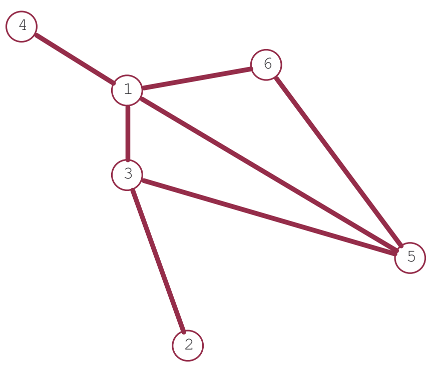


✘ *Graphe partiel et sous-graphe*

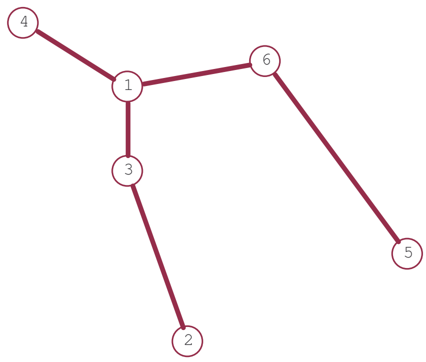
Soit G= (X ;A). un graphe. Le graphe G’= (X ;A’) est un **graphe partiel** de G, si A’ est inclus dans A. Autrement dit, on obtient G’ en enlevant une ou plusieurs arêtes au graphe G.

Un **sous-graphe** de G est un graphe H= (V ; A(V)) tel que V est un sous ensemble de X, et A(V) sont les arêtes induites par A sur V, c'est-à-dire les arêtes de A dont les deux extrémités sont des sommets de V.

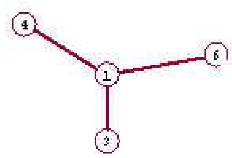
Soit G(X,A) où X={1, 2, 3, 4, 5, 6} et A={ (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,3), (3,5) ,(5,6)}.



Le graphe partiel G(X,A’) est tel que X={1, 2, 3, 4, 5, 6} et A’={ (1,3), (1,4), (1,6), (2,3),(5,6)}.



Le sous-graphe G(V,A(V)) est tel que V={1, 2, 4, 6} et A(V)={(1,3), (1,4), (1,6)}.



Après cet éclaircissement sur ces quelques points théoriques, nous allons bientôt pouvoir résoudre le problème. Avant, nous avons besoin d’un outil concernant la relation existant entre les degrés et les arêtes.

4. .Propriétés

Voici deux propriétés très utiles en théorie des graphes.

✗ *Propriété numéro 1 : Le lemme des poignées de mains*

La somme des degrés des sommets d'un graphe est égale à deux fois son nombre d'arêtes.

$$\sum d(x) = 2A$$

Preuve :

Une arête $a=(x,y)$ du graphe est comptée exactement 2 fois dans la somme des degrés : une fois dans $d(x)$ et une fois dans $d(y)$

✗ *Propriété numéro 2 : Conséquence du précédent théorème*

Le nombre de sommets de degré impair d'un graphe est pair.

Preuve :

D'après le lemme des poignées de mains, $\Sigma d(x)=2A$ est donc pair. Or, nous pouvons écrire :

$$\Sigma d(x)= \Sigma d_i(x)+ \Sigma d_p(x)$$

Où $d_i(x)$ représente un degré impair et $d_p(x)$ un degré pair.

$$\text{Soit } \Sigma d_i(x) = \Sigma\, d(x) - \Sigma d_p(x)$$

La somme des degrés impairs est paire (différence de nombres pairs), elle doit donc contenir un nombre pair de termes. Par conséquent, il y a un nombre pair de sommets de degré impair.

5. Résolution du problème

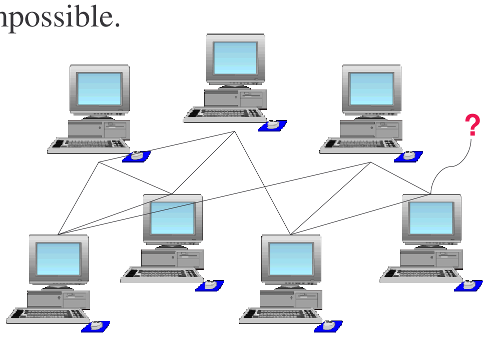
Les personnes qui ont habité la terre et qui ont donné un nombre impair de bises représentent les sommets de degré impair dans un graphe. D'après le théorème précédent, ce nombre de sommets est pair : **le nombre de personnes ayant donné un nombre impair de bises est pair**.

6. Autre application

Cette propriété nous montre que toutes les configurations de connexion ne sont pas possibles.

✗ *Branchement impossible*

Ainsi nous pouvons dire que si l'on veut brancher 7 ordinateurs de sorte que chaque appareil soit relié avec exactement trois autre est impossible.

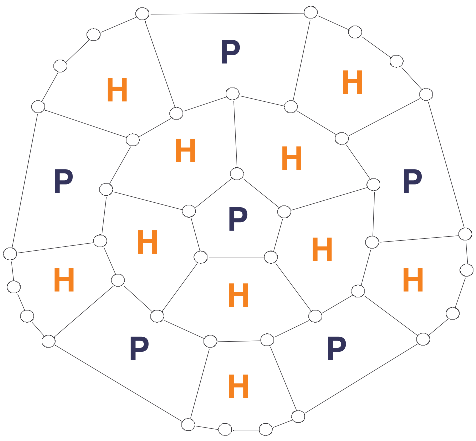


<u>Problème n° 2 :</u>

> ***Le ballon de football est un polyèdre dont toutes les faces sont des hexagones ou pentagones réguliers. Sans les compter, combien y a-t-il de pentagones et d'hexagones?***

1. Modélisation en termes de graphe

Nous cherchons à représenter graphiquement un ballon de football. Par facilité, nous choisissons de n'en représenter que la moitié (existence d'une symétrie). Ainsi, nous aplatissons le ballon de football dans le but d'obtenir un graphe représentant la moitié de ce ballon.



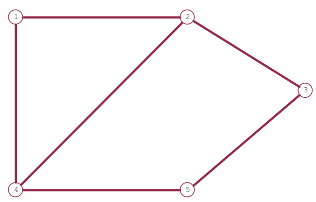
Nous obtenons un graphe dont les sommets correspondent aux sommets des pentagones et hexagones formant le ballon, et dont les arêtes sont les arêtes de ces mêmes polygones.
Ce graphe possède les propriétés des **graphes planaires**.

2. Qu'est ce qu'un graphe planaire?

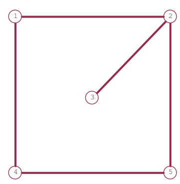
Définition : un graphe planaire est un graphe qui a la particularité de pouvoir se représenter dans un plan sans qu'aucune arête, courbe ou rectiligne, n'en croise une autre.

Exemples :

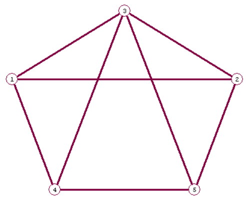
- Ceci est un graphe planaire :



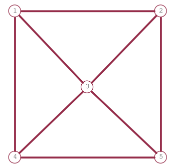
- Ceci est un graphe planaire :



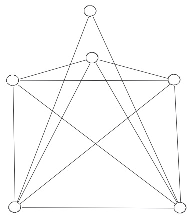
- Ceci est aussi un graphe planaire, contrairement aux apparences …

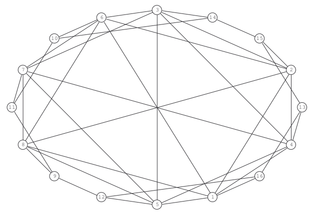


…car nous pouvons représenter ce graphe sous une forme équivalente où les arêtes ne se croisent pas.



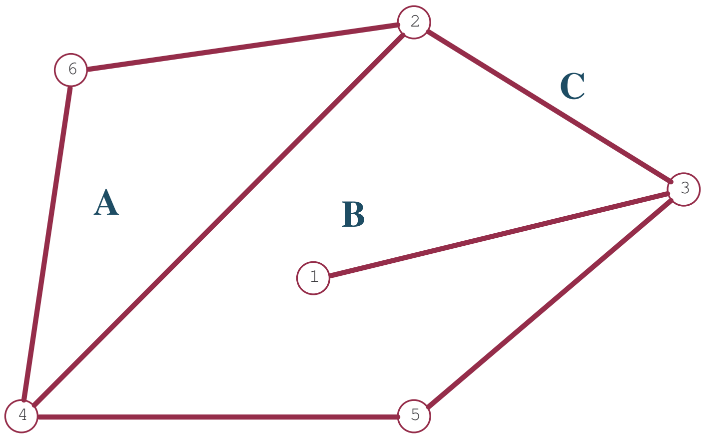
- Ces graphes ne sont pas planaires :





Vocabulaire :

On observe qu'un graphe planaire découpe le plan en plusieurs **régions**.
Une **face** d'un graphe est par définition une région du plan limitée par des arêtes et qui ne contient ni sommets ni arêtes dans son intérieur.
Deux faces r et s sont dites **adjacentes** si leurs contours ont au moins une arête commune ; deux faces qui ne se touchent que par un sommet ne sont pas adjacentes.
Le **degré d'une face** F (ou région) noté d(F) est égal à la longueur du cycle ou de la chaîne fermée qui limite F.



Le graphe planaire ci-contre comporte 6 sommets, 7 arêtes, divise le plan en 3 faces A, B et C. On remarque que les faces A et B sont limitées, alors que la face C, extérieure, est illimitée.
d(A)=3 ; d(B)=6 ; d(C)=5.
La **circonférence** de G est la taille du plus petit cycle dans G, s'il existe. Ici, la circonférence est 3.

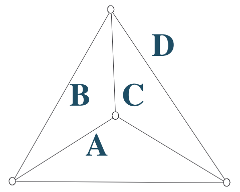
On remarque aussi que toute arête limitant deux faces, est donc comptée deux fois dans la chaîne fermée. D'où le lemme suivant :

Lemme

> La somme des degrés des faces d'un graphe planaire et connexe est égal à deux fois le nombre d'arêtes.

Donc si A= nombre d’arêtes, et n = nombre de faces $\sum_{i=1}^{n} d(F_i) = 2A$

Exemple



Sur ce graphe, le nombre de faces est égal à 4,
la somme des degrés de ces faces est égale à 12
(d(A)=3 ; d(B)= 3 d(C)= 3 ; d(D) = 3) et le nombre d'arêtes vaut 6.
Cette relation est donc vérifiée car 12 = 2.6

3. Résolution du problème

Pour résoudre ce problème posé, deux outils nous seront indispensables.
A savoir, le ***théorème d'Euler*** qui nous permettra de déterminer le nombre de pentagones, de même que la ***relation entre le nombre d'hexagones et de pentagones*** nous permettra de clôturer cette résolution.

Théorème d'Euler

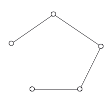
Euler a établi une formule célèbre, concernant les graphes planaires, qui relie le nombre de sommets S, le nombre d'arêtes A et le nombre de régions R,
Euler dit que :

$$\boxed{S - A + F = 2}$$

Démonstration:

1er cas: si le graphe est acyclique (sans cycle)
Cela signifie que le graphe ne comporte qu’une seule face, et comme il est simple et connexe, le nombre de sommets est supérieur d’une unité au nombre d’arêtes.

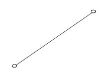
==> F=1
==> S=A+1
==> S – A + F=2 devient A+1-A+1=2



CQFD

2ème cas : si le graphe contient au moins un cycle.
Pour démontrer cette formule, nous utiliserons la récurrence.

- 1. AMORCE



Une seule arête dans un graphe simple connexe signifie 2 sommets et donc 1 face, soit
Si A = 1 alors S = 2 ==> 2-1+F=2 ==> F=1 OK! Par ailleurs, cela nous ramène au cas déjà démontré du graphe acyclique.

- 2. PAS RECURRENT

On suppose que la relation est vraie jusqu'au nombre d’arêtes A-1, c.-à-d. :

$$S_{A-1} - (A-1) + F_{A-1} = 2$$

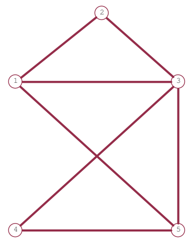
- <u>3. CONCLUSION</u>

Que signifie ajouter une nouvelle arête ? (passer de A-1 arêtes à A arêtes) ?
- Soit ajouter un nouveau sommet. Donc, il n'a pas de nouveau cycle, ni de nouvelle face.

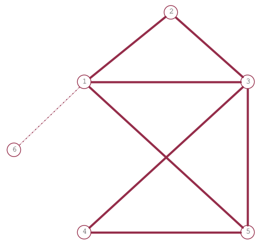
==> $F = F_{A-1}$

==> $S = S_{A-1} + 1$

La formule devient $S - A + F = S_{A-1} + 1 - A + F_{A-1} = S_{A-1} - (A-1) + F_{A-1} = 2$ par l'hypothèse de récurrence.



devient

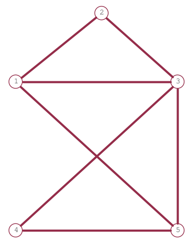


- Soit l'arête rejoint deux sommets préexistant et cela revient à ajouter une nouvelle face.

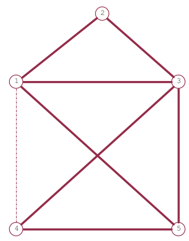
==> $F = F_{A-1} + 1$

==> $S = S_{A-1}$

La formule devient $S - A + F = S_{A-1} - A + F_{A-1} + 1 = S_{A-1} - (A-1) + F_{A-1} = 2$ par l'hypothèse de récurrence.



devient



Résolution du problème

<u>Premièrement</u>, nous allons exprimer le nombre de régions, d'arêtes et de sommets en fonction des hexagones et des pentagones de façon à obtenir une première relation, en utilisant la ***<u>formule d'Euler</u>***.

Nombre de faces = P+H

Nombre d'arêtes = $\frac{6H+5P}{2}$ car chaque arête est rattachée à 2 faces.

Nombre de sommets : $\frac{6H+5P}{3}$ car chaque sommet est rattaché à 3 faces.

Nous pouvons maintenant remplacer ces membres dans la formule d'Euler: **S – A + F = 2**

$$\frac{6H+5P}{3} - \frac{6H+5P}{2} + P + H = 2$$

$$\frac{12H+10P-18H-15P+6P+6H}{6} = 2$$

$$\frac{P}{6} = 2$$

$$P = 12$$

Donc nous pouvons déterminer que le nombre de pentagones P est égal à ***12***.
Ensuite, grâce à l'observation de notre ballon de foot, on peut déterminer une relation entre le nombre de pentagones et d'hexagones.
Chaque hexagone est en contact avec 3 pentagones tandis que chaque pentagone touche 5 hexagones.

$$5P=3H$$

Enfin, nous remplaçons P, le nombre de pentagones (=12), dans cette seconde relation.

$$5.12=3H \Leftrightarrow H=20$$

En conclusion
*Suite à la résolution de ce problème, nous pouvons affirmer que notre ballon contient **20 hexagones** et **12 pentagones**.*

4. Critère de planarité

Y a-t-il un moyen de déterminer si une représentation de graphe est celle d'un graphe planaire ?

Utilité des sous-graphes

Pour montrer qu'un graphe n'est pas planaire, on peut étudier ses sous-graphes. Si G = (X, A) est un graphe, alors tout graphe de la forme (X', A') avec X'⊂ X et A'⊂A \ (X' × X') est appelé un sous-graphe de G. Clairement, si un graphe est planaire, alors c'est le cas de tous ses sous-graphes. En particulier, un graphe n'est pas planaire s'il contient un sous-graphe non planaire. Mais la réciproque est fausse : si tous les sous-graphes sont planaires, le graphe n'est pas forcément planaire : nous le verrons avec le graphe bipartite $K_{3,3}$.

Théorèmes (admis)

Soit G une composante connexe de n sommets d'un graphe planaire.

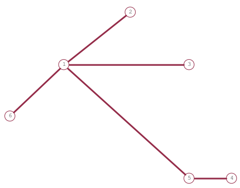
- Si G n'a pas de cycle, alors G a n−1 arêtes (G est un arbre).
- Si G a une circonférence g, alors G a au plus $\dfrac{g.(n-2)}{(g-2)}$ arêtes.

Corollaire
Soit G un graphe planaire et connexe avec n ⩾3 sommets. Alors G contient au plus 3n – 6 arêtes.

Nous allons nous servir de ces théorèmes pour montrer que K_5 et $K_{3,3}$ ne sont pas planaires.

Tout graphe acyclique est planaire

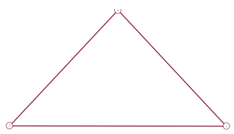
Si le graphe est connexe, c'est un arbre. Sinon, ses composantes connexes sont des arbres et donc planaires.



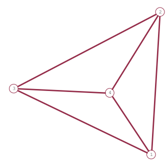
Les graphes complets sont …

… planaires jusqu'à l'ordre 4.

K_3



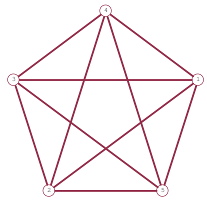
K_4



… non planaires à partir de l’ordre 5.
En effet, K5 contient 10 arêtes, ce qui est supérieur à la borne de 3.5-6=9 arêtes permise par le théorème ci-dessus.

donc K_n n’est pas planaire ∀ n ⩾ 5, car il contient des sous-graphes non planaires.

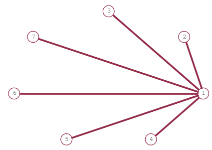
K_5 n’est pas planaire :



Les graphes bipartites …

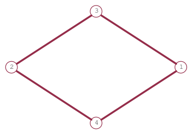
… de type $K_{1,n}$ sont planaires ∀n.

$K_{1,n}$ est un arbre :

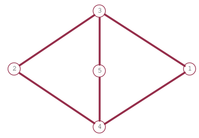


… de type $K_{2,n}$ sont planaires ∀n.

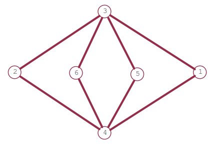
$K_{2,2}$



$K_{2,3}$

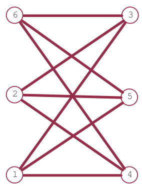


$K_{2,4}$

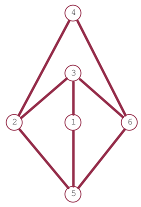


… de type $K_{3,3}$ n’est pas planaire.
En effet, il contient une circonférence g=4 et 3*3 = 9 arêtes, ce qui est supérieur à la borne de 4.(6-2)/(4-2)=8 arêtes permise par le théorème ci-dessus.

$K_{3,3}$



↓



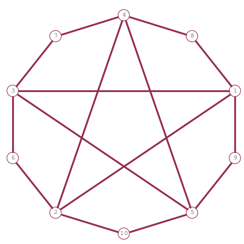
Tous les sous-graphes propres de $K_{3,3}$ sont planaires : la suppression de n’importe quelle arête de $K_{3,3}$ le rend planaire.
Comme $K_{3,3}$ est symétrique par rapport aux sommets de chacun des ses côtés, on peut choisir l’arête que l’on veut.

Dans la figure ci-contre, on supprime l’arête entre les sommets 4 et 1.

… de type $K_{m,n}$ n’est pas planaire ∀m,n>3.

car un tel graphe contient $K_{3,3}$ comme sous-graphe.

Théorème de Kuratowski



Donc, un graphe qui contient K_5 ou $K_{3,3}$ n’est pas planaire. Mais ce n’est pas suffisant. Par exemple le graphe ci-contre n’est pas planaire, alors qu’il ne contient aucun sous-graphe de type K_5 ou $K_{3,3}$.
Ce graphe est obtenu depuis K_5 par un procédé appelé **subdivision** ou **expansion** dans lequel un nouveau sommet (ou plusieurs) est placé sur une arête qui existe déjà. (par exemple, transformation de l'arête •——• en •—•—•).

D’où le théorème du mathématicien polonais **Kazimierz Kuratowski** qui a établi la caractérisation suivante des graphes planaires :

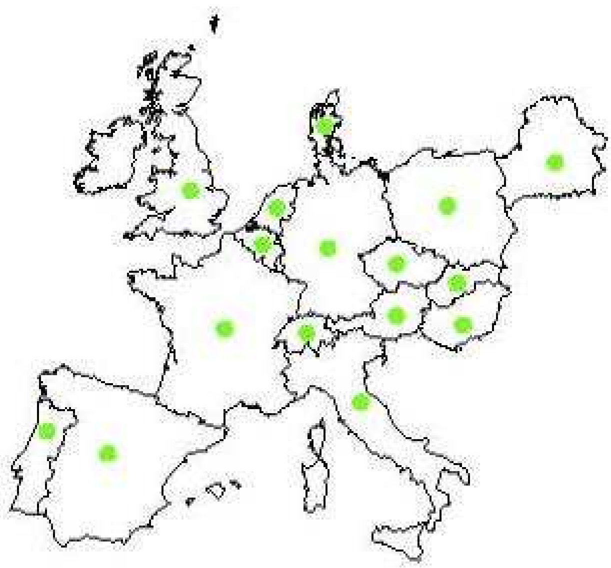
> Un graphe fini est planaire si et seulement s'il ne contient pas de sous-graphe qui soit une *expansion* de K_5 ou $K_{3,3}$

Problème n°3

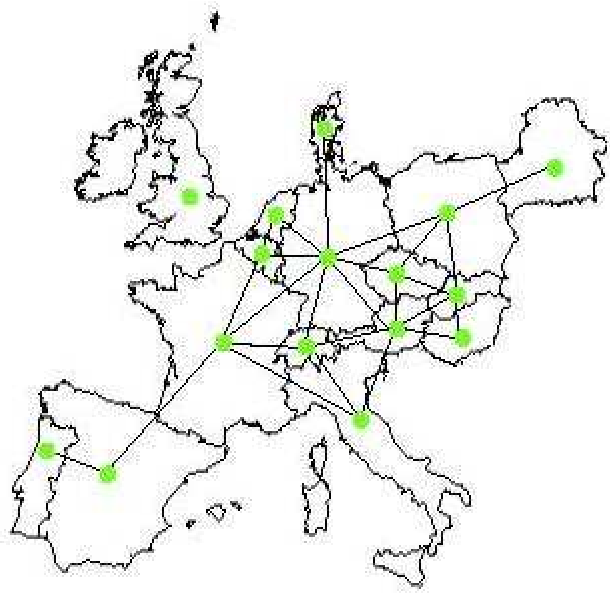
Combien de couleurs au minimum faut-il pour colorer chaque pays de la carte d'Europe de telle sorte que 2 pays voisins ne soient pas de la même couleur ?

1. Modélisation en termes de graphe

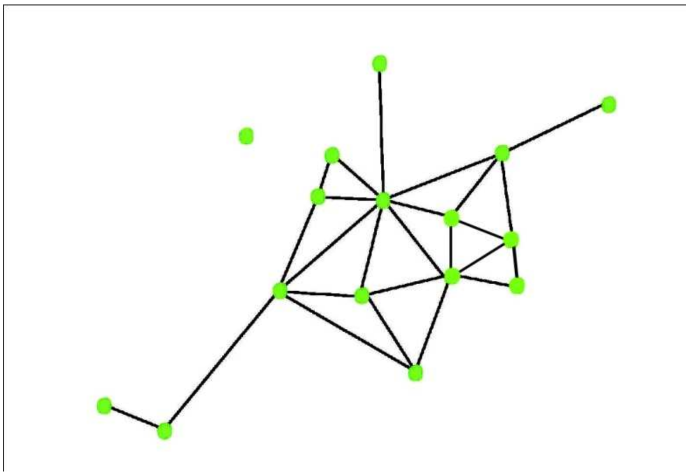
Pour résoudre notre problème, nous devons transformer notre carte d'Europe en graphe.



Chaque pays représente un sommet du graphe.



Les pays ayant une frontière commune sont reliés par une arête.



Les arêtes ne se croisent pas. Nous obtenons un graphe planaire.

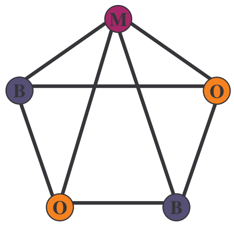
Attribuer une couleur à chaque pays consiste en l'attribution de couleurs aux sommets, de telle sorte que deux sommets adjacents n'aient jamais la même couleur. Pour résoudre ce problème, nous utiliserons la **coloration** de graphe.

2. Définitions et propriétés

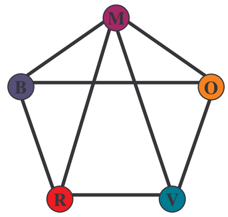
Une **coloration** d'un graphe consiste en l'attribution de couleurs aux sommets, de telle sorte que deux sommets adjacents n'aient jamais la même couleur.

Si le graphe est coloré en k couleurs, on dit qu'on a une ***k* coloration** du graphe.

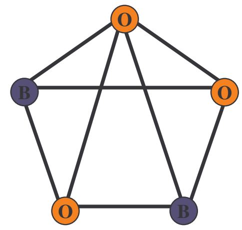
Un graphe d'ordre n peut toujours être en n couleurs. Cependant, on utilise systématiquement le nombre minimum de couleurs : on recherche toujours la coloration minimale.



3 couleurs suffisent pour colorer ce graphe à 5 sommets.



On peut utiliser 5 couleurs différentes pour ce graphe d'ordre 5.



Cette coloration ne convient pas car le sommet supérieur possède la même couleur orange que deux sommets adjacents.

Nombre chromatique

Le **nombre chromatique** d'un graphe, noté $\chi(G)$, est le nombre minimum de couleurs nécessaires à sa coloration, c'est-à-dire le plus petit nombre de couleurs permettant de colorier tous les sommets du graphe sans que deux sommets adjacents soient de la même couleur.

Le nombre chromatique du graphe précédent est 3 : $\chi(G)=3$.

Sous-graphe

Rappel :
Un **sous-graphe** d'un graphe G est un graphe dont les sommets et les arêtes sont des sommets et des arêtes de G.

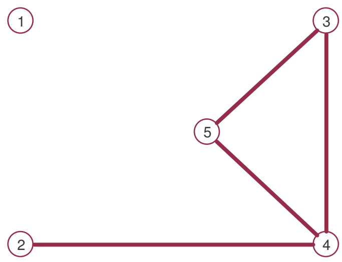
Un sous-graphe est **stable** si ses sommets ne sont reliés par aucune arête. Le cardinal du plus grand stable est noté **α(G)**.

Le nombre chromatique d'un sous-graphe stable est toujours égal à 1 car aucun sommet n'y est relié.

Un sous-graphe est une **clique** si tous ses sommets sont reliés les uns aux autres par une arête. Le cardinal de la plus grande clique est noté **ω(G)**.

Le nombre chromatique pour chaque sous-graphe clique est toujours égal au degré, d(C), de cette clique car les sommets y sont tous liés.

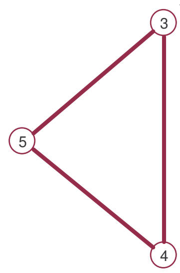
Voici un graphe G(X,A)



Et voici un stable :

Un autre stable serait {1,2,3} - $\alpha(G)=3$
1 seule couleur est nécessaire pour colorer ce sous-graphe.

Et voici une clique:

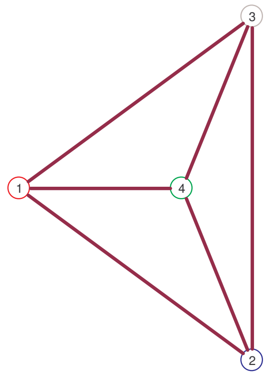


Une autre clique serait {2,4} - $\omega(G)=3$
3 couleurs sont nécessaires pour colorer ce sous-graphe.

Nombre chromatique de graphes particuliers

Le nombre chromatique des **graphes complets** K_n, est égal au degré, d(S), des sommets. Soit χ=n.

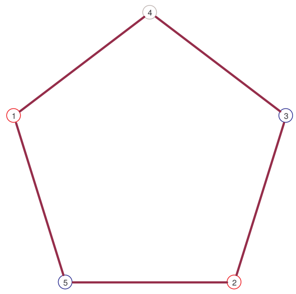
Voici K_4, χ=4.



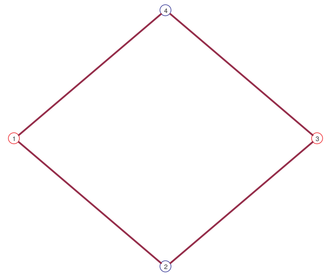
Un **cycle élémentaire** est un cycle qui passe une fois et une seule par chacun des sommets.

Le nombre chromatique d'un cycle élémentaire est

- 2 si son nombre de sommets est pair
- 3 si son nombre de sommets est impair



n=5 $\Rightarrow \chi$=3



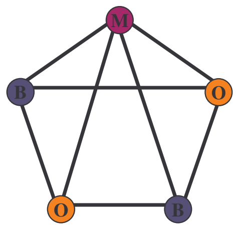
n=4 $\Rightarrow \chi$=2

Propriétés

- Le nombre chromatique d'un graphe est inférieur ou égal à **r+1**, où r est le plus grand degré de ses sommets.

Explication : Soit un graphe, et r le degré maximum de ses sommets. Chaque sommet s du graphe est adjacent à r sommets au plus, et le nombre de couleurs à utiliser pour colorer ces sommets adjacents est donc inférieur ou égal à r. Nous rajoutons une couleur pour le sommet s.

Dans ce graphe, $d_{max}(x)$ =4 $\geq \chi$ (G)=3.

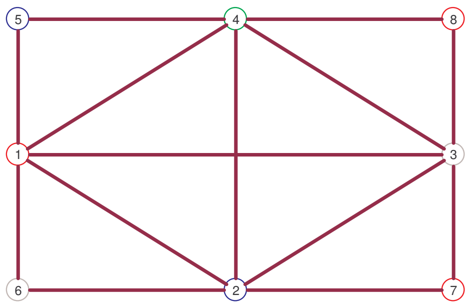


- Le nombre chromatique d'un graphe est supérieur ou égal à celui de chacun de ses sous-graphes.

Explication : Ce résultat découle de la définition même du nombre chromatique.

Conséquence : Tout graphe qui contient un sous-graphe complet d'ordre n a un nombre chromatique supérieur ou égal à n.

Ce graphe contient un sous-graphe de type K_4, χ (G)=4.



- Soit G = (X;A) un graphe simple d'ordre n; alors $\chi(G) \leq 1+(n-\alpha(G))$.

Explication : Soit une partie stable S de cardinal $\alpha(G)$). Une coloration possible des sommets consiste à colorier les sommets de ce stable S d'une même couleur (puisqu'ils ne sont pas adjacents) et les $(n-\alpha(G))$ autres sommets de couleurs toutes différentes. Il faut au plus une couleur (pour le stable) et $n-\alpha(G)$ couleurs pour les autres sommets.

Ce graphe est d'ordre 6.

Examinons ses stables :

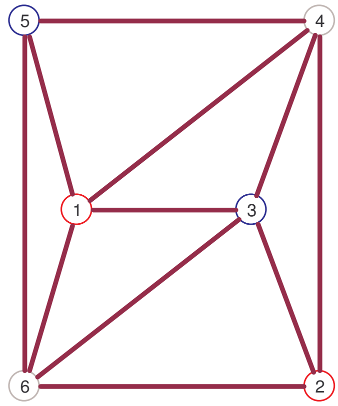
$S_1=\{5,3\}$ - $S_2=\{4,6\}$

$S_3=\{1,2\}$ - $S_4=\{5,2\}$

Donc $\alpha(G)=2$

$\chi(G) \leq 1+(n-\alpha(G))=1+(6-2)=5$

Or, $\chi(G)=3$



On voit, dans ce dernier exemple, que cette dernière propriété majore le nombre chromatique, mais n'en donne pas une valeur minimale.

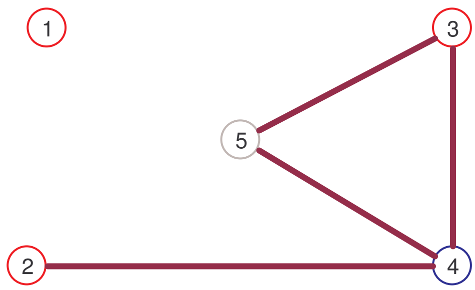
Pourtant, la partition des 6 sommets en 3 stables montre que 3 couleurs suffisent pour colorer le graphe : 1 couleur pour chaque stable, puisque les sommets d'un même stable peuvent adopter la même couleur.

Par contre, le nombre chromatique doit être supérieur à $\omega(G)$: tous les sommets d'une clique étant adjacents entre eux doivent posséder une couleur différente. Ici : $\omega(G) = 3$ (avec par exemple la clique $\{1, 4, 5\}$. D'où la nécessité d'un minimum de trois couleurs.

Reprenons l'exemple initial :

$\alpha(G)=3$; $\omega(G)=3$

Il faut donc au minimum 3 couleurs pour colorer le graphe puisque la clique {3, 4, 5} comporte 3 sommets adjacents. $\chi(G)=3$



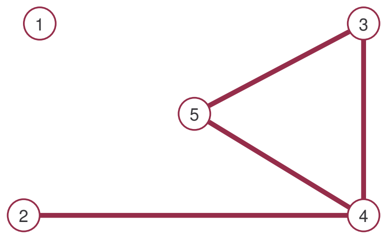
3. L'algorithme de Welsh et Powell.

La coloration de graphe quand l'ordre est petit est assez aisée, mais le problème se complique dès lors que le nombre de sommets augmente. Aussi, pour colorer un graphe, des algorithmes ont été développés.

L'algorithme que nous avons choisi de présenter (il en existe d'autres) permet d'obtenir une assez bonne coloration d'un graphe, c'est à dire une coloration n'utilisant pas un trop grand nombre de couleurs. Cependant, il n'assure pas que le nombre de couleurs utilisé soit minimum (et donc égal au nombre chromatique du graphe).

Étape 1

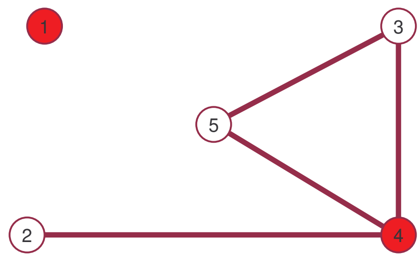
Classer les sommets du graphe dans l'ordre décroissant de leur degré, et attribuer à chacun des sommets son numéro d'ordre dans la liste obtenue. On obtient une liste ordonnée de sommets x_1, x_2,..x_n tels que : $d(x_1) \geq d(x_2) \geq \ldots \geq d(x_n)$.



$d(\mathbf{4}) \geq d(\mathbf{3}) = d(\mathbf{5}) \geq d(\mathbf{2}) \geq d(\mathbf{1})$

Étape 2

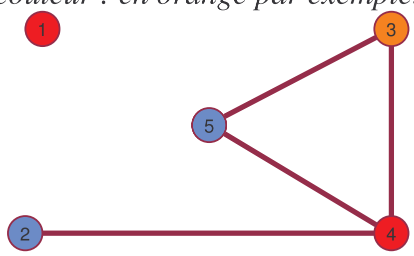
En parcourant la liste dans l'ordre, attribuer une couleur non encore utilisée au premier sommet non encore coloré, et attribuer cette même couleur à chaque sommet non encore coloré et non adjacent à un sommet de cette couleur.



Nous colorons le sommet 4 en rouge pour débuter, ainsi que le sommet 1 qui ne lui est pas adjacent.
Nous colorons à présent le sommet 5 en bleu, ainsi que le sommet 2 qui ne lui est pas adjacent.
Il reste à colorer le sommet 3 en une troisième couleur : en orange par exemple.

Étape 3

S'il reste des sommets non colorés dans le graphe, revenir à l'étape 2.
Sinon, la coloration est terminée.



4. Le théorème des quatre couleurs

Obtenir une majoration du nombre chromatique est possible. L'idéal est que ce nombre plafond soit le plus petit possible. Aussi, plusieurs théorèmes ont été énoncés quant au nombre chromatique des graphes planaires : d'abord le théorème des 6 couleurs, ensuite le théorème des 5 couleurs et enfin le **théorème des 4 couleurs**. ***(Appel et Haken 1977)***

Tout graphe planaire est-coloriable en 4 couleurs.

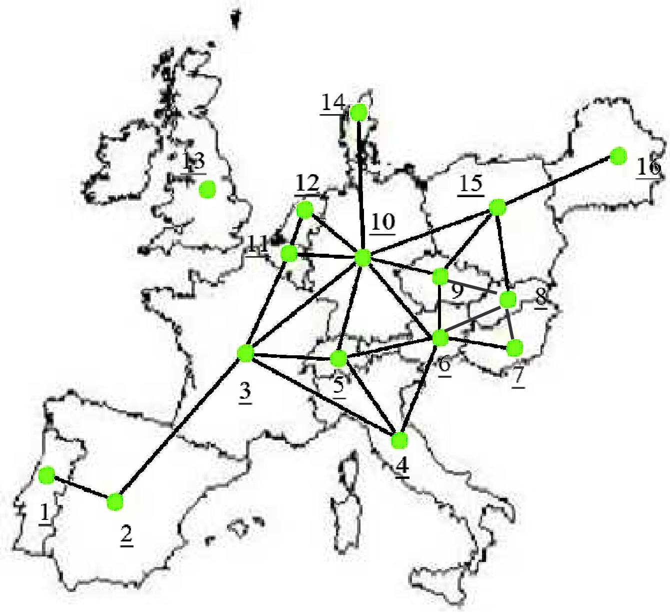
Ce théorème affirme qu'il est possible, en n'utilisant que quatre couleurs différentes, de colorer n'importe quelle carte découpée en régions connexes, de sorte que deux régions adjacentes (ou limitrophes), c'est-à-dire ayant toutes une frontière (et non simplement un point) en commun reçoivent toujours deux couleurs distinctes. L'énoncé peut varier et concerner, de manière tout à fait équivalente, la coloration des faces d'un polyèdre, ou des sommets d'un graphe planaire.

Cependant ce théorème n'a été démontré que grâce à l'utilisation d'ordinateurs, tant le nombre de cas à étudier est grand. Il était donc de ce fait très controversé car la plupart des mathématiciens n'étant pas capables de vérifier l'exactitude des programmes utilisés.

5. Résolution du problème

✘ *Etape 1 :*

1. Attribuer à chaque sommet du graphe un nombre.
2. Repérer le degré de chaque sommet.
3. Classer les sommets du graphe dans l'ordre décroissant de leur degré en attribuant à chacun des sommets un numéro d'ordre dans la liste obtenue.



2.

$D(S_1)=1$	$D(S_5)=4$	$D(S_9)=3$	$D(S_{13})=0$
$D(S_2)=2$	$D(S_6)=5$	$D(S_{10})=8$	$D(S_{14})=1$
$D(S_3)=5$	$D(S_7)=1$	$D(S_{11})=3$	$D(S_{15})=4$
$D(S_4)=3$	$D(S_8)=1$	$D(S_{12})=2$	$D(S_{16})=1$

3.

1	2	3	4	5	6	7	8
S_{10}	S_6	S_3	S_5	S_{15}	S_4	S_9	S_{11}

9	10	11	12	13	14	15	16
S_2	S_{12}	S_1	S_7	S_8	S_{14}	S_{16}	S_{13}

✘ *Etape 2*

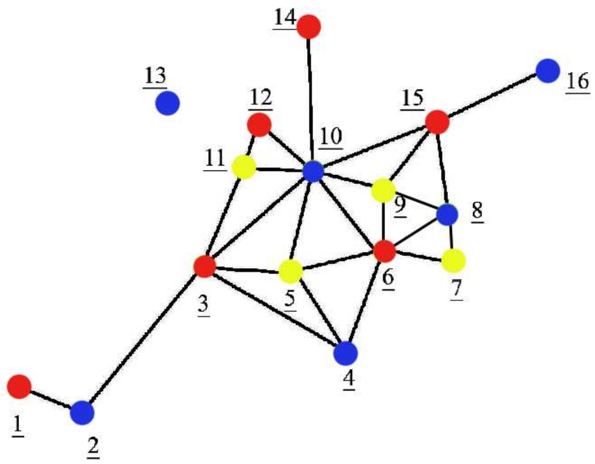
En parcourant la liste dans l'ordre, attribuer une couleur non utilisée au premier sommet non encore coloré, et attribuer cette même couleur à chaque sommet non coloré et non adjacent à un sommet de cette couleur.

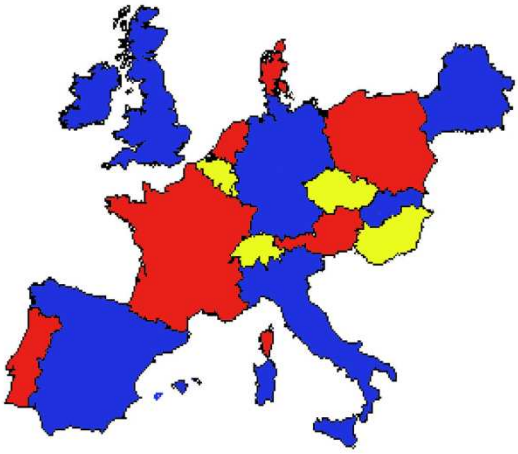
✘ *Etape 3*

S'il reste des sommets non colorés dans le graphe, revenir à l'étape 2. Sinon, la coloration est terminée.

Sommet	n° d'ordre	couleur attribuée
S_{10}	1	
S_6	2	
S_3	3	
S_5	4	
S_8	5	
S_9	6	
S_{15}	7	
S_4	8	
S_{11}	9	
S_2	10	
S_7	11	
S_{12}	12	
S_1	13	
S_{14}	14	
S_{16}	15	
S_{13}	16	

Voici le résultat obtenu :





Nous avons réussi à colorer notre graphe avec un minimum de trois couleurs. $\chi(G) = 3$

6. Autres applications de la coloration de graphes

Outre les activités de coloriage au sens propre, la coloration de graphe est utilisée dans de nombreux domaines : attribution d'horaire, organisation d'examens, incompatibilité d'humeurs, approvisionnement de chantiers par différentes routes, …

Voici un exemple concret : l'allocation de fréquences.

Certains réseaux de télécommunication sont composés d'émetteurs émettant chacun sur une fréquence particulière. Lorsque deux émetteurs sont trop proches on ne peut leur allouer la même fréquence à cause des interférences (sauf si éventuellement une montagne les sépare).

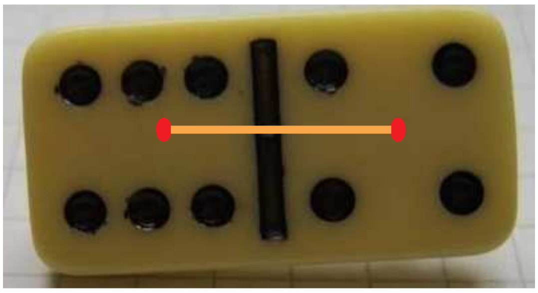
On associe un graphe au réseau—chaque sommet est un émetteur et chaque arête spécifie que l'on ne veut pas allouer la même fréquence aux deux émetteurs correspondant à ses deux extrémités—et ainsi déterminer une allocation réalisable avec un minimum de fréquences (dont la licence d'exploitation peut entrainer un coût important). Ce problème est un cas particulier du problème de la coloration de graphe.

Problème n° 4 :

> ***Est-il possible d'aligner toutes les pièces d'un domino en respectant la continuité ?***

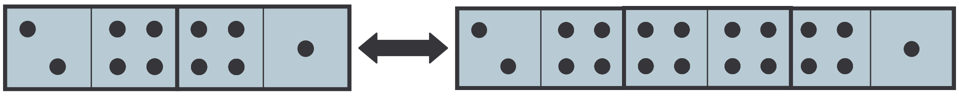
1. Modélisation en termes de graphe

On considère qu'une pièce de domino correspond à une arête et deux sommets. Par conséquent, il est possible de former un graphe connexe en alignant plusieurs pièces, soit plusieurs arêtes.



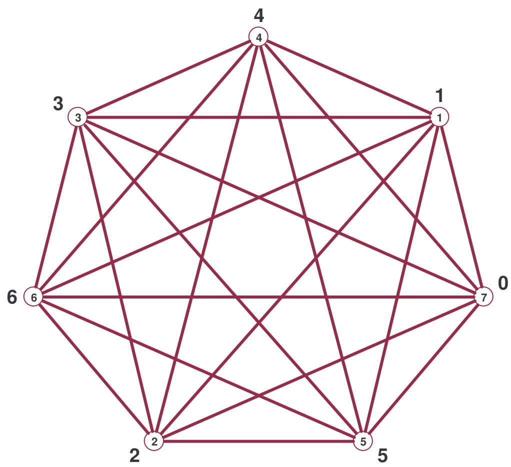
: sommets 0, 1, …, 6
: arête

Dans un jeu de domino, il y a 7 cases différentes soit 7 sommets. La case vide est représentée par le zéro, la case à 1 point par le chiffre 1 et ainsi de suite… Nous ignorons les pièces doubles car elles s'insèrent facilement dans le parcours.



La représentation graphique de notre problème se présente alors comme un graphe complet de type K_7.

⇒ Aligner toutes les pièces de domino revient à partir d'une case (=1 sommet) et rejoindre (passer sur une arête) une autre case, en utilisant tous les chemins (=arêtes) possibles. Notre problème consiste à trouver un chemin passant une et une seule fois par toutes les arêtes soit, en termes de graphe, trouver un **cycle eulérien**.



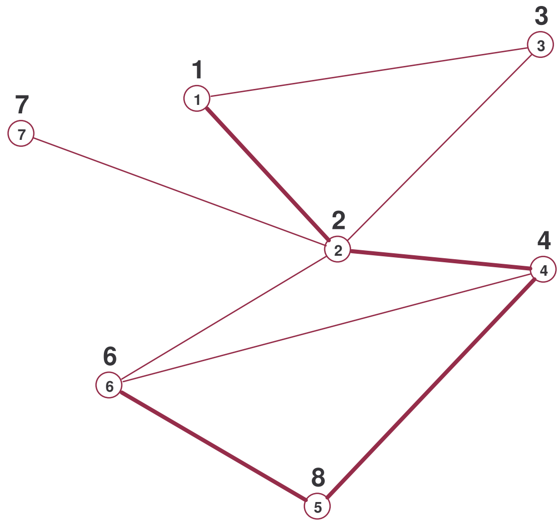
2. Qu'est- ce qu'un graphe eulérien ?

Dans un graphe, on peut « se déplacer » de sommet en sommet en suivant les arêtes.

Un **chemin** ou **chaîne** est une liste p= $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ de sommets telle qu'il existe dans le graphe G(V,E) une arête entre chaque paire de sommets successifs, soit $\forall i=1, \ldots, n-1, (x_i,x_{i+1}) \in E$.

La **longueur** du chemin correspond au nombre d'arêtes parcourues : k-1.

Dans l'exemple ci-contre, p=(1 – 2 – 4 – 8 – 6) est un chemin de longueur 4 reliant le sommet 1 au sommet 6. Mais il existe bien d'autres chemins qui relient ces deux sommets : (1 – 2 – 6) est de longueur 2.

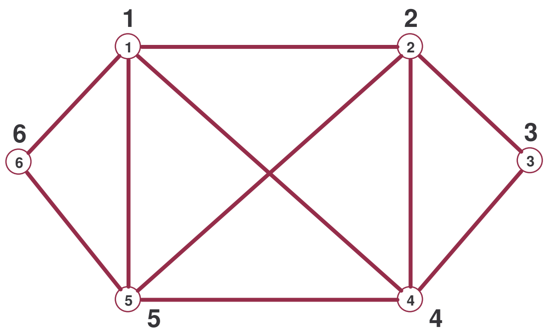


Un chemin p est **simple** si chaque arête du chemin est empruntée une seule fois.

Un **cycle** c= $(x_1, x_2, \ldots x_n)$est un chemin simple finissant à son point de départ : $x_i=x_n$

Ci-contre, le chemin simple (2 – 4 – 6 – 2) forme un cycle de longueur 3.
Le chemin (1 – 3 -2 – 7 – 2 – 1) ne forme pas un cycle car l'arête (7 – 2) est empruntée deux fois.

Une **chaîne eulérienne** est une chaîne empruntant une fois et une seule chaque arête du graphe.



Un **cycle eulérien** est un cycle empruntant une fois et une seule chaque arête du graphe.

Un **graphe eulérien** est un graphe qui présente un cycle eulérien.

Le graphe ci-contre est eulérien car il admet au moins un cycle eulérien :
1 – 2 – 3 – 4 – 2 – 5 – 6 – 1 – 5 - 4 – 1
En voilà un autre :
1 – 4 – 2 – 5 – 1 – 6 – 5 – 4 – 3– 2 – 1

- Dans un graphe eulérien, on peut passer sur chaque arête une et une seule fois, mais on peut passer plusieurs fois par chaque sommet.
- L'adjectif « eulérien » doit son origine au grand mathématicien Léonhard Euler (1707-1783).

3. Le Théorème d'Euler

A quelle condition un graphe est-il eulérien ? Euler a répondu à cette question.

Un graphe simple connexe G=(X ,A) est eulérien *si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair.*
$\forall x \in X$, d(x) est pair.

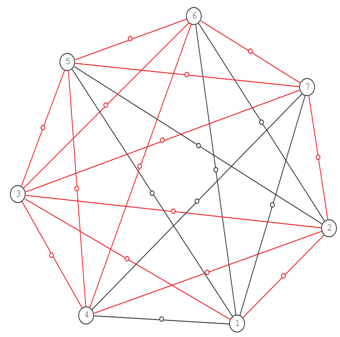
Démonstration

Condition nécessaire

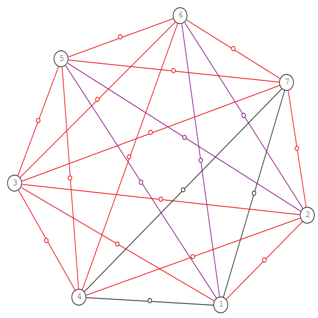
Supposons G eulérien, soit alors c un cycle eulérien et x un sommet de G.
Le cycle c contient toutes les arêtes de G, donc toutes les d(x) arêtes ayant x comme extrémité.
Lors d'un parcours de c on arrive en x autant de fois qu'on en repart, chaque arête de G étant présente une et une seule fois dans c, d (x) est nécessairement un nombre pair.

Condition suffisante

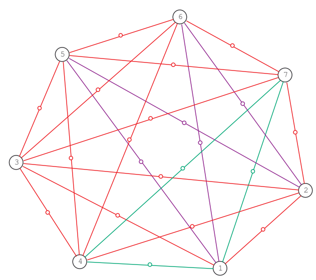
Réciproquement, supposons que tous les sommets de G soient de degré pair.
Formons une chaîne simple c_1, aussi longue que possible, à partir d'un sommet arbitraire x_0. Cette chaîne c_1 est en fait un cycle, sinon, son extrémité finale serait de degré impair.
Si ce cycle c_1 contient toutes les arêtes de G, c_1 est le cycle eulérien recherché.



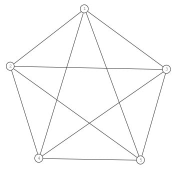
Dans le cas contraire, on considère le sous-graphe H obtenu à partir de G en éliminant les arêtes de c_1 et ses sommets qui ne sont incidents à aucune des arêtes restantes. Comme G est connexe, H possède au moins un sommet commun avec le cycle c_1.
Soit x_1 un tel sommet. Les sommets de H sont encore de degré pair (on a ôté un nombre pair d'arêtes incidentes à x_1).
Construisons alors, de la même manière que précédemment, un cycle c_2 au départ de x_1 dans H.
La réunion de c_1 et c_2 forme une cycle c'_1 de x_0 à x_0.
Si ce cycle c'_1 passe par toutes les arêtes de G, c'_1 est le cycle eulérien recherché.



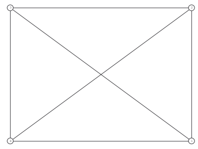
Dans le cas contraire, on considère le sous graphe I obtenu à partir de H en éliminant les arêtes de c_2 et les sommets qui ne sont incidents à aucune des arêtes restantes. Construisons un cycle c_3 de la même manière que pour c_2.
On peut poursuivre ce processus jusqu'à atteindre le cycle eulérien recherché. Ceci se fait en un nombre fini d'étapes car le graphe G comporte un nombre fini de sommets.



Application du théorème

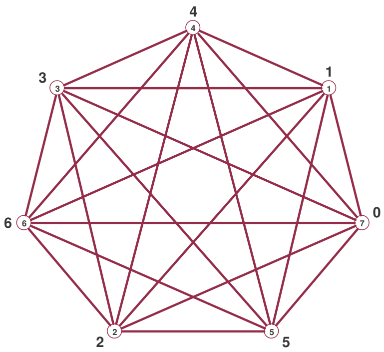


Ce graphe est eulérien car
$\forall$sommet x, d (x) est pair,
il est donc possible de trouver un cycle eulérien.



Ce graphe n'est pas eulérien car
$\forall$sommet x, d (x) est impair,
il est donc impossible de trouver un cycle eulérien.

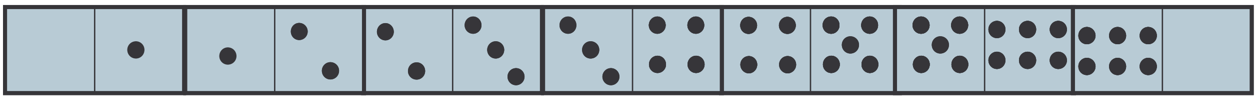
4. Résolution du problème



Le graphe de notre problème est eulérien car
$\forall$sommet x, d (x) = 6, nombre pair.
Il est donc possible de trouver au moins un cycle eulérien.
Il est possible d'aligner toutes les pièces d'un domino en respectant la continuité

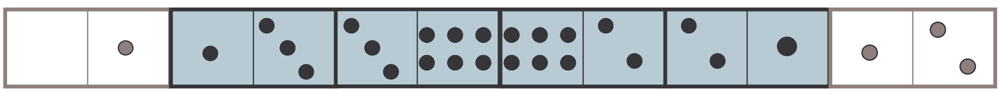
Il existe plusieurs cycles, la recherche d'un cycle eulérien suivant le même processus que la démonstration du théorème. Trouvons un cycle, au départ d'un sommet :
Soit $x_0=0$

0 -1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 0



Intercalons des cycles secondaires, au départ des sommets de ce dernier sous-graphe :
Soit au départ de $x_1=1$

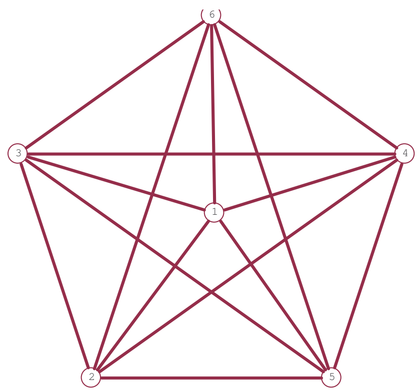
0 – 1 **– 3 – 6 – 2 – 1** – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 0



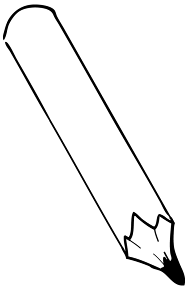
Nous recommençons jusqu'à ce que toutes les arêtes soient visitées.
A la fin, il nous reste à intercaler les pièces doubles.

Observation :

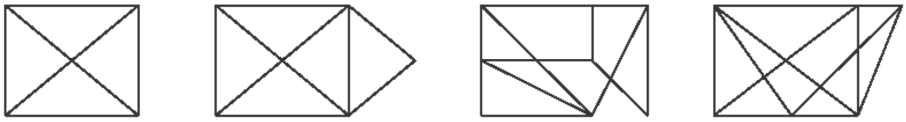
Le retrait d'un type de pièce (= d'un sommet) transforme notre graphe en graphe complet de type K6. Dans ce cas, le degré de chaque sommet vaut 5. Donc, d'après le théorème, le graphe n'est plus eulérien : il n'est pas possible d'aligner toutes les pièces !



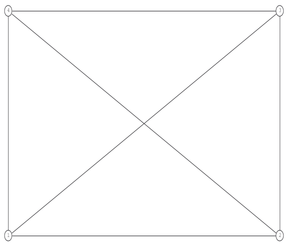
Problème n°5



Est-il possible de tracer ces figures sans lever le crayon et sans repasser deux fois par le même trait ?



1. Modélisation en termes de graphe



Prenons la première figure. Celle-ci s'apparente à un graphe. Dessiner la figure « sans lever le crayon et sans repasser deux fois par le même trait » revient à passer sur chaque arête du graphe une seule fois.
Si le graphe de la figure répond au critère du théorème précédent, nous pourrons trouver un cycle eulérien et résoudre le problème.
Mais pour cette première figure, $\forall$ sommet x, d(x)= 3 ! Il ne s'agit donc pas d'un graphe eulérien.

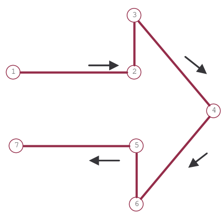
Le graphe eulérien impose deux choses : passer sur chaque arête une seule fois et revenir à son point de départ. Or, pour dessiner chaque trait, il n'est pas nécessaire de revenir au point de départ : il n'est pas nécessaire de trouver un cycle eulérien dans le graphe, une **chaîne eulérienne** suffit. Notre graphe doit être **semi-eulérien**.

2. Graphe semi-eulérien

Définition

Un graphe est **semi-eulérien** lorsqu'il possède une chaîne eulérienne : on peut le tracer en passant par toutes les arêtes une et une seule fois (sans l'obligation de finir au point par lequel on a commencé).

Exemple de graphe semi-eulérien



Théorème

> ***Un graphe simple connexe G=(X ,A) est semi-eulérien***
> *ssi au plus 2 de ses sommets sont de degré impair.*

Démonstration

Ce théorème est une conséquence du théorème pour les graphes eulériens.

Condition nécessaire

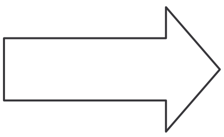
Premier cas : G n'admet pas de sommet de degré impair. Soit $\forall$sommet x, d (x) est pair, et il est donc possible de trouver un cycle eulérien qu'il suffit de prendre comme chaîne eulérienne.

Deuxième cas : G admet 2 sommets de degré impair. Soit x et y. En ajoutant l'arête (x,y), on obtient un graphe eulérien : la suppression de l'arête (x,y) de son cycle eulérien montre l'existence dans G d'un chemin eulérien entre x et y.

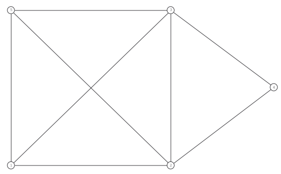
Condition suffisante

Si le graphe G est semi-eulérien, il admet une chaîne eulérienne.
Si cette chaîne est un cycle, le graphe est eulérien et tous les sommets sont de degré pair.
Si cette chaîne n'est pas un cycle, considérons que son origine soit x et son extrémité soit y. Dans cette chaîne, seuls x et y sont de degré impair, car tous les autres sommets sont tels que toute arête entrante impose une arête sortante. Donc, seuls deux sommets sont de degré impair.

Théorème d'Euler : application

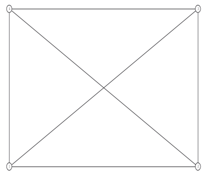


Aucun sommet de degré impair.
Graphe eulérien.
On peut tracer ce graphe sans lever le crayon en terminant sur le même point que celui sur lequel on a commencé.



2 sommets de degré impair.
Graphe semi-eulérien.

On peut tracer ce graphe sans lever le crayon en terminant sur un autre point que celui par lequel on a commencé

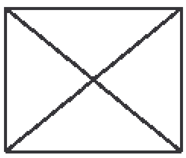


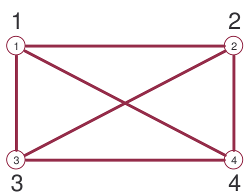
4 sommets de degré impair.
Il n'existe pas de chaîne eulérienne.

On ne peut tracer ce graphe sans lever le crayon

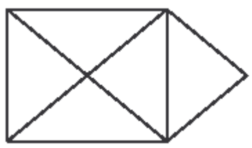
3. Résolution du problème

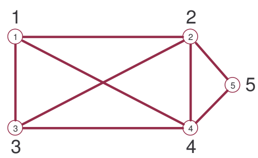
Ces figures sont-elles assimilables à des graphes semi-eulériens ?



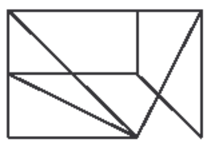


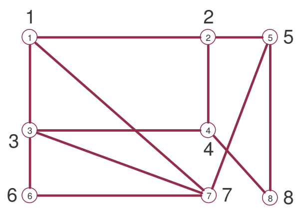
4 sommets de degré impair.
Il n'existe pas de chaîne eulérienne.



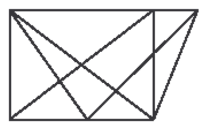


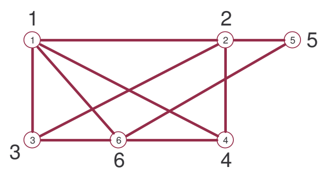
2 sommets de degré impair (1 et 3)
Graphe semi-eulérien.





4 sommets de degré impair (1, 2, 4, 5)
Il n'existe pas de chaîne eulérienne.





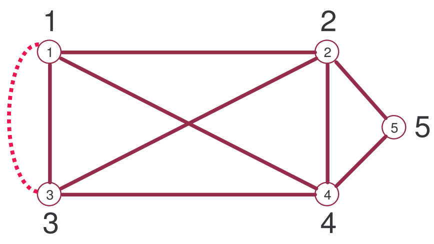
2 sommets de degré impair (3 et 4)
Graphe semi-eulérien.

Nous savons qu'il est possible d'effectuer un tracé simple pour les figures 2 et 4, il faut encore savoir **comment tracer le dessin** ? De quelle façon doit-on procéder ?

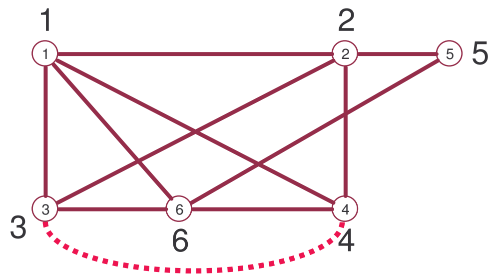
✘ *Identifier la chaîne eulérienne*

1) Tout d’abord, il faut **rendre le graphe eulérien**.

Pour ce faire, nous devons ajouter une arête (« x, y ») reliant les deux sommets de degré impair. De ce fait, tous les sommets sont de degré pair.



Nous ajoutons l’arête (1, 3)

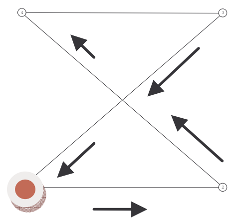


Nous ajoutons l’arête (3,4)

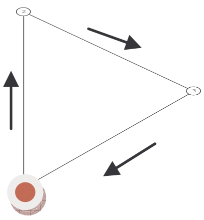
2) La suite consiste à construire à l’intérieur du graphe de plus petits cycles eulériens.

⟶ Dans notre cas : (--- :arête joignant le premier et le dernier sommet

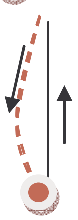
:point de départ)



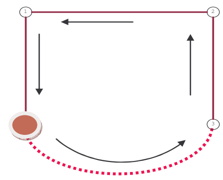
cycle c_1



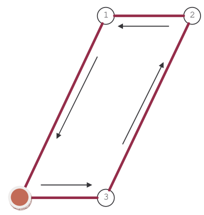
cycle c_2



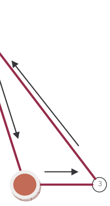
cycle c_3



cycle c_1



cycle c_2



cycle c_3

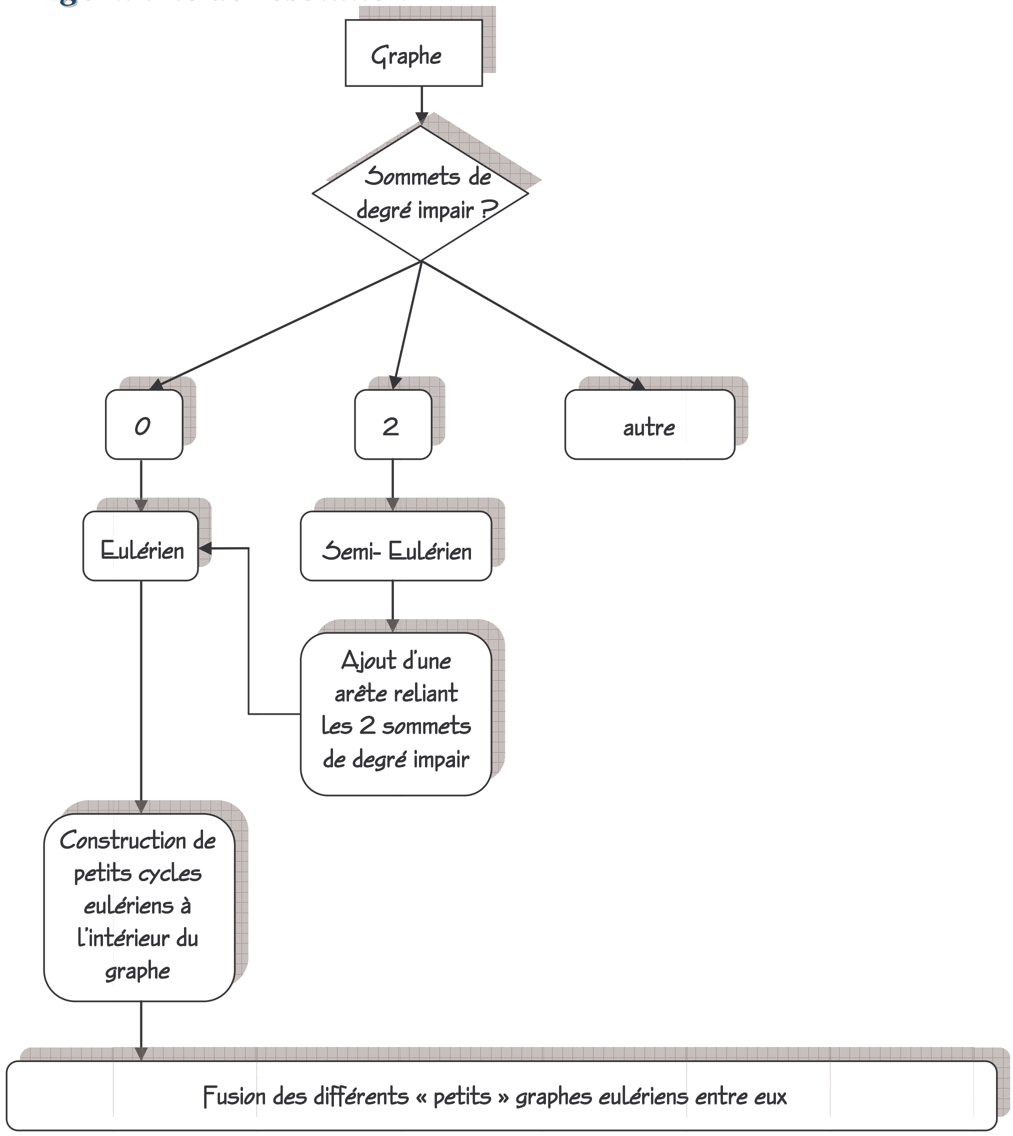
Chaque fois que nous arrivons et repartons d'un sommet dans notre marche, nous supprimons 2 de ses arêtes incidentes. Les arêtes du graphe étant supprimées au fur et à mesure de la construction, elles apparaissent bien exactement une fois dans le cycle final.

3) Enfin, il suffit de fusionner les différents « petits » graphes eulériens entre eux

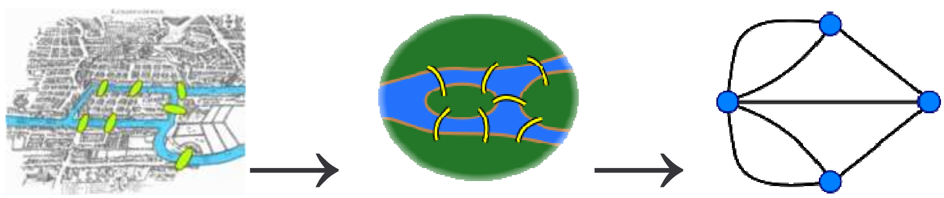
La chaîne eulérienne est :
3 – 4 – 2 – 5 – 4 – 1 – 2 – 3 - 1

La chaîne eulérienne est :
3 –2 – 5 – 6 – 1 – 4 –6 – 3 – 1 – 2 – 4

✘ *Algorithme de résolution*



4. Problème célèbre : les 7 ponts de Königsberg :



La ville de Königsberg (actuellement Kaliningrad en Russie) est construite autour de deux îles reliées entre elles par un pont et six ponts relient le continent à l'une ou l'autre des deux îles.
Le problème consiste à déterminer s'il existe ou non une promenade dans les rues de Königsberg permettant, à partir d'un point de départ au choix, de passer une et une seule fois par chaque pont, et de revenir à son point de départ, étant entendu qu'on ne peut traverser le fleuve qu'en passant sur les ponts.
Sa résolution fut recherchée par ses habitants tout au long du XVIIIe siècle.
Le problème était insoluble, et c'est Leonhard Euler qui, le premier, donna à ce problème la première résolution mathématique formelle en le ramenant à un problème de la théorie (le mot « théorie » vient du mot grec theorein, qui signifie « contempler, observer, examiner ») des graphes.
Pour ce faire, nous représentons ce problème sous forme d'un graphe. Nous pouvons alors voir que ce graphe ne possède pas de cycle eulérien car tous ses sommets sont de degré impair, il est donc impossible, à partir d'un point de départ au choix, de passer une et une seule fois par chaque pont, et de revenir à son point de départ.

Problème n°6

Une fourmi se ballade sur des polyèdres platoniciens.
Existe-t-il un chemin qui lui permette de visiter une seule fois chaque sommet ?

1. Qu'est-ce qu'un polyèdre platonicien ?

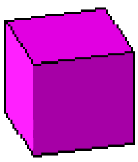
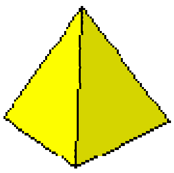
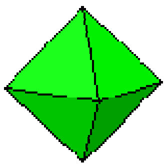
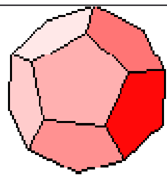
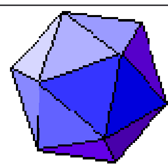
Petit détour par la géométrie dans l'espace pour comprendre notre problème …

Un **polyèdre platonicien** est un polyèdre convexe régulier.

- **Polyèdre** : un polyèdre est un volume limité par des faces planes. L'intersection de deux faces est une arête et l'intersection de deux arêtes est un sommet.
- **Convexe** : un polyèdre est convexe s'il est toujours situé d'un même côté du plan d'une quelconque de ses faces.
- **Régulier** : un polyèdre convexe est régulier si toutes ses faces sont des polygones réguliers isométriques et si en chaque sommet aboutit le même nombre de faces.

Un polyèdre régulier est inscriptible dans une sphère et toutes ses faces sont des polygones réguliers isométriques.

Euclide a prouvé qu'il existe exactement 5 polyèdres convexes réguliers :

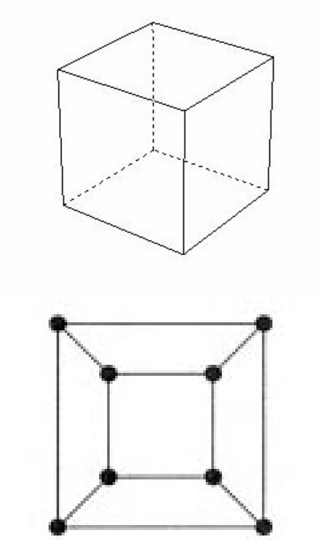
le cube	***le tétraèdre***	***l'octaèdre***	***dodécaèdre***	***l'icosaèdre***
 *Le cube possède 8 sommets, 12 arêtes, 6 faces qui sont des carrés.*	 *Le tétraèdre possède 4 sommets, 6 arêtes, 4 faces qui sont des triangles équilatéraux.*	 *L'octaèdre possède 6 sommets, 12 arêtes, 8 faces qui sont des triangles équilatéraux.*	 *Le dodécaèdre possède 20 sommets, 30 arêtes, 12 faces qui sont des pentagones réguliers.*	 *L'icosaèdre possède 12 sommets, 30 arêtes, 20 faces qui sont des triangles équilatéraux.*

Ces solides sont appelés communément solides de Platon en raison de ses travaux. Les Grecs ont accordé une signification mystique aux cinq solides réguliers en les rattachant aux grandes entités qui, selon eux, façonnaient le monde : le feu est associé au tétraèdre, l'air à l'octaèdre, la terre au cube, l'univers au dodécaèdre et l'eau à l'icosaèdre.

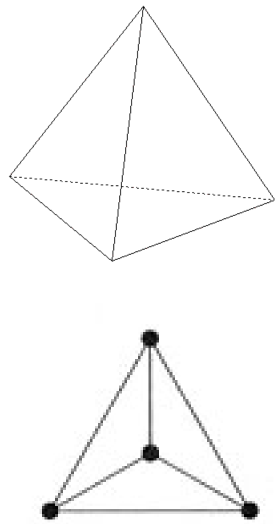
2. Modélisation en termes de graphe

Les solides de Platon peuvent être traduits en termes de graphe :

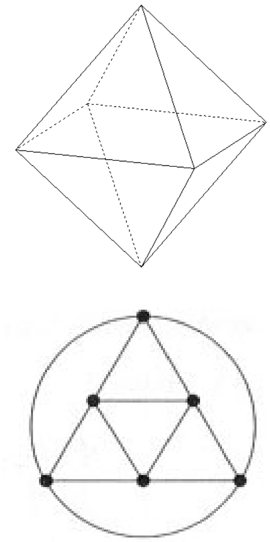
Le Cube



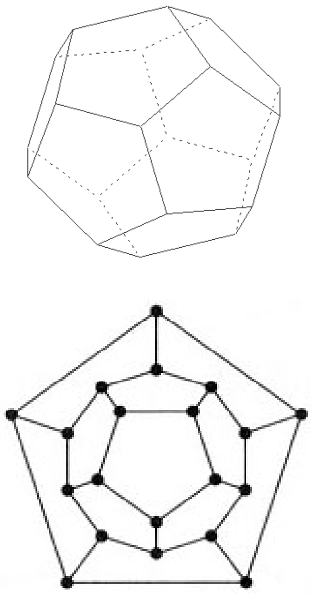
Le tétraèdre



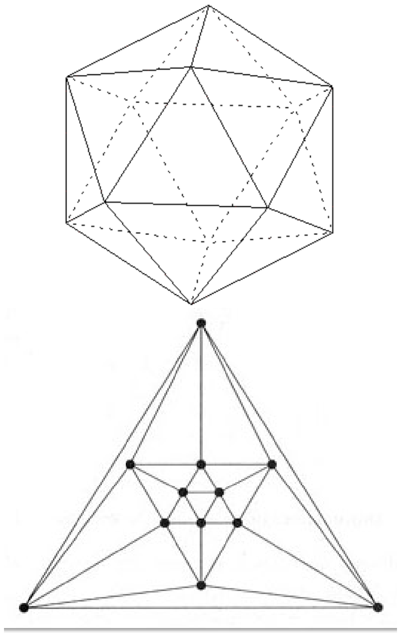
L'octaèdre



Le dodécaèdre



L'icosaèdre



La fourmi doit visiter chacun des sommets en n'y passant qu'une seule fois. Faire cela équivaut en théorie des graphes à effectuer un chemin hamiltonien.

3. Graphes hamiltoniens

Vocabulaire

Une **chaîne hamiltonienne** est une chaîne passant une fois et une seule par chaque sommet du graphe situé entre les deux extrémités de la chaîne.

Un **cycle hamiltonien** est un cycle qui passe une fois et une seule par chaque sommet du graphe.

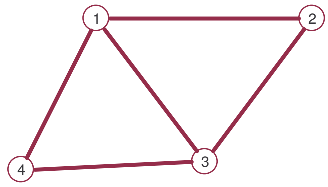
Un **graphe hamiltonien** est un graphe qui présente un cycle hamiltonien.

Un graphe hamiltonien passe par tous les sommets, mais pas nécessairement par toutes les arêtes.

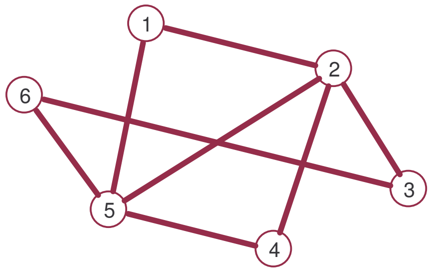
Un **graphe semi-hamiltonien** est un graphe qui présente une chaîne hamiltonienne constituée de tous les sommets du graphe.

Le graphe ci-contre est semi-hamiltonien : il ne comporte aucun cycle hamiltonien, par contre 1 – 5 – 6 – 3 – 2 – 4 et *1 – 2 – 3 – 6 – 5 – 4 forment des chaines hamiltoniennes.*
Remarquez qu'aucune chaîne hamiltonienne ne part de 5 ou de 2.

Le graphe ci-dessous est hamiltonien car il admet au moins un cycle hamiltonien :
1 – 2 – 3 – 4



En voilà un autre :
3 – 2 – 1 – 4
Remarquez que dans chaque cas, l'arête (1, 3) n'est pas empruntée.



Histoire :

Le concept du graphe hamiltonien vient d'un problème soulevé par Hamilton en 1859 :
« Peut-on, en partant d'un sommet d'une figure, passer par tous les sommets une et une seule fois en revenant finalement à son point de départ ?».

Partant de ce problème, Hamilton a même inventé un jeu appelé *'Icosian game'*.
Le but du jeu est de résoudre le problème sur une figure bien spécifique : le dodécaèdre.

Aujourd'hui encore, la théorie des graphes hamiltoniens n'a pas été percée à jour et les recherches continuent toujours dans ce domaine.

4. Critères et Théorèmes :

Il n'existe pas de critères précis pour déterminer un graphe hamiltonien, contrairement aux graphes eulériens.
Il existe tout de même quelques propriétés et conditions. Cependant, les conditions ne sont que suffisantes et non pas nécessaires. Nous pouvons donc, grâce à cela, affirmer qu'un graphe est hamiltonien s'il répond à l'une des conditions mais il faut aussi savoir qu'un graphe ne répondant pas aux conditions, peut tout de même être hamiltonien.

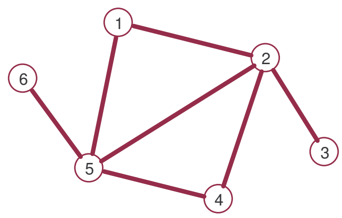
✘ Propriété n°1

- Un graphe possédant un sommet de degré 1 ne peut être hamiltonien.

Explication : On ne peut pas trouver un cycle passant une et une seule fois par chaque sommet.

Dans ce graphe, le sommet 6 est de degré 1. On peut en partir, mais sans pouvoir y revenir. Ou à l'inverse, y arriver, sans pouvoir en repartir.

Même constat pour le sommet 3.

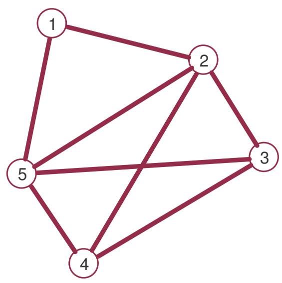


✘ Propriété n°2

- Si un sommet dans un graphe est de degré 2, alors, les deux arêtes incidentes à ce sommet doivent faire partie du cycle hamiltonien

Explication : Au sommet de degré 2, arrivent deux arêtes. Si on veut passer par ce sommet, il est donc nécessaire d'emprunter une arête incidente pour l'atteindre et d'emprunter la seconde pour le quitter.

Le sommet 1 est de degré 2 ; Le cycle hamiltonien comprend donc les arêtes (5,1) et (1,2)..

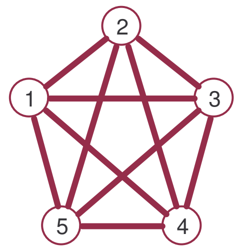


✘ Propriété n°3

- Les graphes complets K_n $\forall n \geq 3$ sont hamiltoniens.

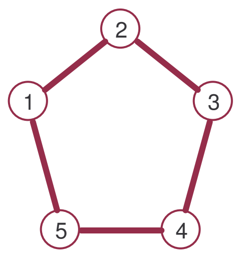
Explication : Puisque dans un graphe complet, les sommets sont reliés entre eux, il existera toujours un moyen de passer d'un sommet à un autre sans repasser par un sommet déjà atteint.

Exemple : Ici, un graphe de type K_5. Ce graphe est hamiltonien. Un cycle hamiltonien parmi d'autres : 1 – 2 – 3 – 4 – 5 !



Attention : Ce critère est suffisant mais pas nécessaire puisqu'un graphe non complet peut être hamiltonien.

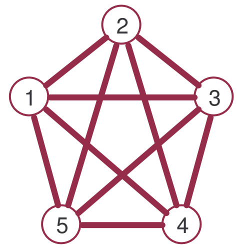
Exemple : ce graphe n'est pas complet mais il est hamiltonien.



Propriété n°4

- Si n est impair et que $n \geq 3$ alors K_n a $(n-1)/2$ chaînes hamiltoniennes n'ayant aucune arête commune.

Exemple : Ici, un graphe de type K_5.
Les chaînes 1 – 2 – 3 – 4 – 5 et 1 – 3 – 5 – 2 – 4
n'ont aucune arête commune.



Théorème (Ore)

- Soit G = (X, A) un graphe simple d'ordre $n \geq 3$. Si pour toute paire {x, y} de sommets non adjacents, on a $d(x) + d(y) \geq n$, alors G est hamiltonien.

Corollaire (Dirac)

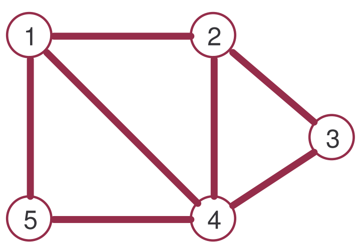
- Soit G = (X, A) un graphe simple d'ordre $n \geq 3$. Si pour tout sommet x de G, on a $d(x) \geq n/2$, alors G est hamiltonien.

Explication : En effet, un tel graphe vérifie les conditions du théorème précédent. Si x et y ne sont pas adjacents, on a bien : $d(x) + d(y) \geq n/2 + n/2 = n$

Autres théorèmes

- Soit G un graphe simple, non-orienté ayant n sommets et m arêtes.
  Si $m \geq (n^2-3n+6)/2$, alors G est hamiltonien.
- Soit G un graphe simple, non-orienté ayant n sommets.
  S'il existe au moins $(n-1)n/2+2$ arêtes, alors G est hamiltonien.

Toutes ces conditions sont **suffisantes**, mais pas **nécessaires**.



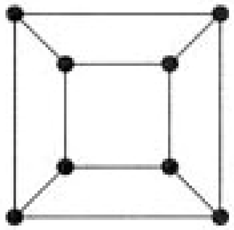
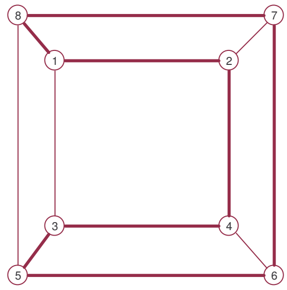
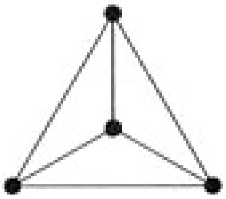
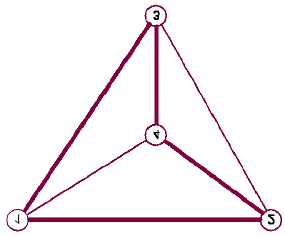
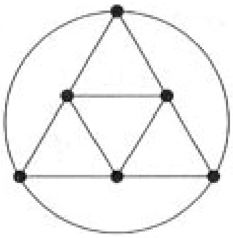
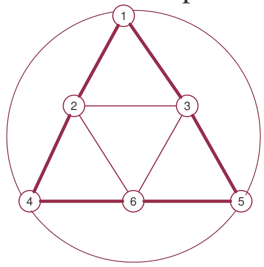
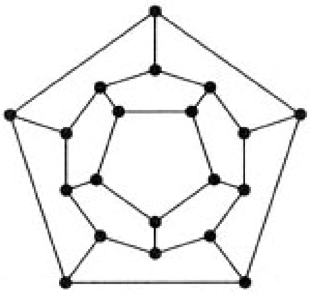
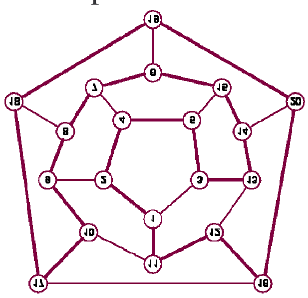
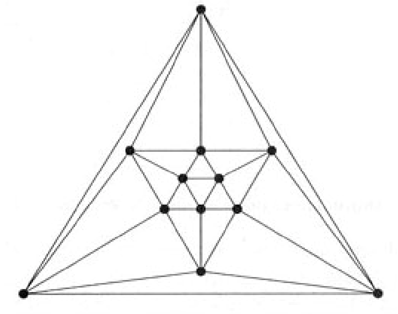
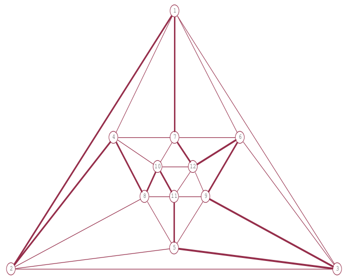
En effet, voici un exemple de graphe hamiltonien. Nous pouvons en dégager le cycle 1 – 2- 3 – 4 – 5 .

- *Pourtant,*
- *il n'est pas complet.*
- *il ne répond pas au critère de Ore : $d(3)+d(5)=5<5$*
- *il ne répond pas au critère de Dirac : $d(5)/2<5$.*
- *il ne répond pas non plus au précédent théorème :*

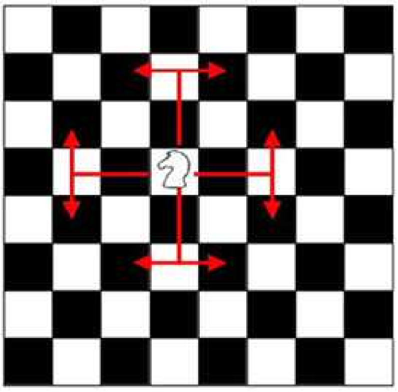
$7<(5^2-3.5+6)/2=8$!

5. Résolution du problème

Nous remarquons que les polyèdres platoniciens ne répondent pas tous aux critères vus précédemment. Pour autant, doit-on conclure que ces graphes ne sont pas hamiltoniens ? Il nous faut aller chercher plus loin.
Examinons chaque solide de Platon.

✘ ***Le cube*** 	*8 sommets, 12 arêtes.* ♦ *Non complet* ♦ *Ne répond pas à Dirac car* $\forall x, y\ d(x)+d(y)=6<8$ ♦ *Ne répond pas à Ore car* $\forall x\ d(x)=3<4$ ♦ $12<(8^2-3.8+6)/2=23$	Pourtant, voici un chemin possible :  Il n'est pas unique.
✘ ***Le tétraèdre*** 	*4 sommets, 6 arêtes.* ♦ *Graphe de type* K_4*, donc complet ! Donc hamiltonien.*	Voici un chemin possible :  Il n'est pas unique.
✘ ***L'octaèdre*** 	*6 sommets, 12 arêtes.* ♦ *Non complet* ♦ *Répond à Dirac car* $\forall x, y,\ d(x)+d(y)=8>6$	Voici un chemin possible :  Il n'est pas unique.
✘ ***Le dodécaèdre*** 	*20 sommets, 30 arêtes.* ♦ *Non complet* ♦ *Ne répond pas à Dirac car* $\forall x, y\ d(x)+d(y)=6<20$ ♦ *Ne répond pas à Ore car* $\forall x\ d(x)=3<10$ ♦ $30<(20^2-3.20+6)/2=173$	Pourtant, voici un chemin possible :  Il n'est pas unique.
✘ ***L'icosaèdre*** 	*12 sommets, 30 arêtes.* ♦ *Non complet* ♦ *Ne répond pas à Dirac car* $\forall x, y\ d(x)+d(y)=10<12$ ♦ *Ne répond pas à Ore car* $\forall x\ d(x)=10<10$ ♦ $30<(12^2-3.12+6)/2=114$	Pourtant, voici un chemin possible :  Il n'est pas unique.

6. Une application bien connue : Le cavalier du jeu d'échec



Le problème du cavalier est un cas particulier des graphes hamiltoniens.

Voici un jeu d'échec.
Le problème du cavalier veut que l'on trouve un moyen de faire passer le cavalier d'un jeu d'échec par chacune des cases une et une seule fois.
Rappel du déplacement du cavalier : il se déplace sur deux cases dans une direction puis d'une case dans la direction perpendiculaire.

Le problème admet des millions de solutions !
Même si il n'a pas été le premier à en fournir une solution, le mathématicien Leonhard Euler est cependant le premier à l'avoir étudié scientifiquement en 1759.

➔Il existe un algorithme selon lequel il faut choisir à chaque fois le coup qui offre le plus petit nombre de possibilités différent de zéro (celui-ci définissant un cul-de-sac).
Exemple : la case A1, tout en haut à gauche, donne deux possibilités (C2 et B3). Elle est donc de degré 2. Si on arrive sur la case C2, il nous faudra donc choisir d'aller sur la case A1 et non sur une autre puisque c'est celle-là qui donne le moins de possibilités. On passera ensuite d'office par B3. Si on ne le fait pas, la case A1 risque de ne plus pouvoir être atteinte par après. En effet, elle ne pourra plus être que la case finale puisque si on l'atteint par après par B3 (seule autre possibilité), on ne pourra plus en partir, la case C2 ayant déjà été atteinte auparavant.

➔Voici deux autres solutions à ce problème :

✘ *Euler et la symétrie:*

37	62	43	56	35	60	41	50
44	55	36	61	42	19	34	59
63	38	53	46	57	40	51	48
54	45	64	39	52	47	58	33
1	26	15	20	7	32	13	22
16	19	8	25	14	21	6	31
27	2	17	10	29	4	23	12
18	9	28	3	24	11	30	5

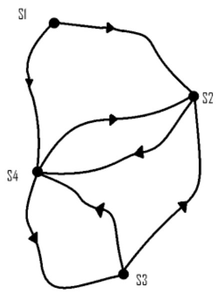
Cette solution à la marche du cavalier présente une symétrie. En effet, nous pouvons remarquer que la différence entre deux nombres situés symétriquement par rapport au centre du carré vaut un même nombre pour chaque couple. Ici, il vaut 32.

✘ *Carrés semi-magiques :*

1	30	47	52	5	28	43	54
48	51	2	29	44	53	6	27
31	46	49	4	25	8	55	42
50	3	32	45	56	41	26	7
33	62	15	20	9	24	39	58
16	19	34	61	40	57	10	23
63	14	17	36	21	12	59	38
18	35	64	13	60	37	22	11

Voici une autre solution intéressante : la somme sur les lignes et les colonnes donnent 260. Malheureusement les diagonales ne donnent pas cette somme. La solution est donc celle d'un carré semi-magique.
Par ailleurs, si on séparait en 4 carrés plus petits: ils seraient tous les 4 semi-magiques, avec pour somme 130. En coupant encore en carré de 4 cellules, la somme des 4 nombres est aussi 130.

Problème n°7



Un parcours de santé est aménagé pour les sportifs dans le parc de la ville. Il est composé de chemins en sens unique, et de repères tous distants de 500 mètres, comme indiqué sur la figure ci-contre. Tout trajet commence en S1 et se termine en S4.
Combien y a-t-il de trajets différents de 1.5 Km ? 2.0 Km ? 2.5 Km ?

1. Modélisation en termes de graphe

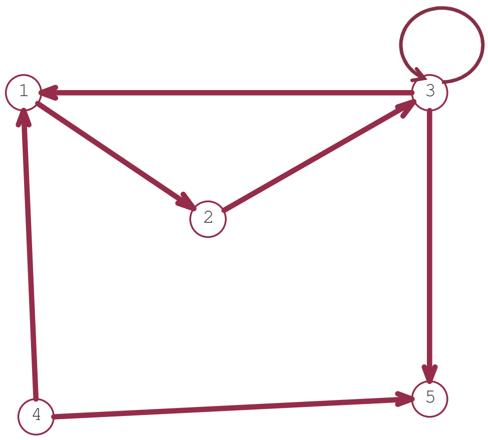
Si l'on veut résoudre ce problème par la théorie des graphes, il faut, étant donné que certaines portions du tracé sont à sens unique, utiliser un graphe dont les arêtes ont une direction et dont les propriétés nous permettent de résoudre le problème.
C'est donc pour cela que nous allons avoir recours aux **graphes orientés** ou **digraphes** (**di**rected **graph**) et à la matrice permettant de l'exprimer algébriquement : la matrice d'adjacence qui, nous allons le voir plus loin a des propriétés intéressantes.

2. Digraphes

Un digraphe ou graphe orienté , G=(X,A) est défini par les ensembles finis $X=\{x_1,x_2,x_3,\ldots\ldots\ldots,x_n\}$ ($|X|=n$) dont les éléments sont appelés **sommets** et par l'ensemble fini $A=\{a_1,a_2,a_3,\ldots\ldots\ldots,a_m\}$ ($|A|=m$) dont les éléments sont appelés **arcs**.

On peut remarquer que le digraphe est défini comme un simple graphe à ceci près qu'un arc de l'ensemble A est défini par une paire **ordonnée** de sommets. Lorsque a=(x,y) on dira que l'arc a va de x à y, on dit aussi que x est l'extrémité initiale de l'arc et y est son extrémité finale.

Ci-contre, un exemple de digraphe.



Nb : Tout comme un graphe, un digraphe peut contenir des boucles.

Soit x, un sommet d'un graphe orienté.
Le degré du sommet x est égal à la somme du degré **extérieur** du sommet x (noté $\mathbf{d^+(x)}$), et du degré **intérieur** du sommet v(noté $\mathbf{d^-(x)}$),

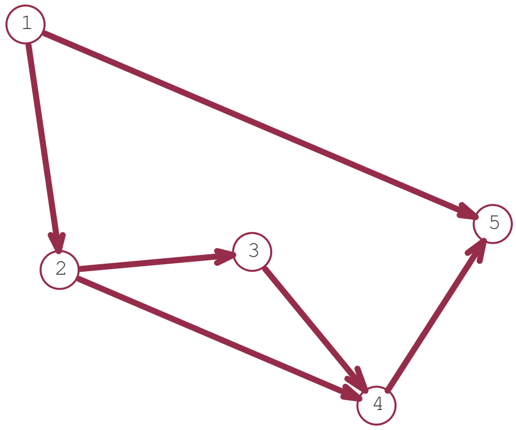
Le **degré extérieur** du sommet x est égal au nombre d'arcs ayant x comme extrémité initiale.
Le **degré intérieur** du sommet x est égal au nombre d'arcs ayant x comme extrémité finale.

$$\boxed{d(x)= d^+(x) + d^-(x)}$$

Dans l'exemple ci-contre, d(2)=2 avec $d^+(2)=1$ et $d^-(2)=1$

Chemins et circuits d'un digraphe :

Un **chemin** conduisant du sommet a au sommet b est défini par une suite de la forme $(x_0,a_1,x_1,a_2,x_2,\ldots,x_{k-1},a_k,x_k)$ où les x_i sont des sommets (x_0=a et x_k=b)et les a_i sont des arcs tels que a_i va de x_{i-1} à x_i.



On appelle **distance** entre deux sommets d'un digraphe la longueur du plus petit chemin les reliant.

S'il n'existe pas de chemins entre les sommets x et y, on pose $d(x,y)=\infty$

Un circuit est un chemin fermé simple. ($x_0=x_k$).

Ici $d(1,3)=2$; $d(1,4)=3$
Et $d(5,2)=\infty$

Le digraphe ci-dessus ne compte pas de circuit.

Il peut parfois dans la résolution d'un problème quelconque être utile de connaître le plus court chemin possible entre un sommet en particulier et d'autres sommets. Il existe à cette fin un algorithme, celui de Dijkstra qui permet de trouver cela.

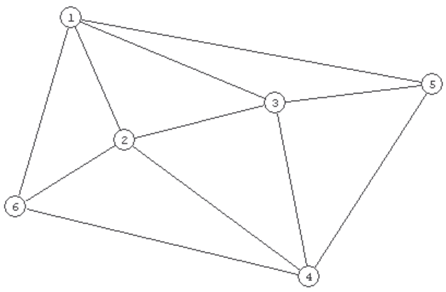
3. Matrices et listes d'adjacences :

Les digraphes (tout comme les graphes non-orientés) peuvent être représentés algébriquement sous la forme d'une matrice, d'ordre (nxn), aussi appelée **matrice d'adjacence**.
Soit G(X,A) un graphe orienté, avec $X = \{x_1; x_2 : : : ;x_n\}$. La matrice d'adjacence du graphe est la matrice $\mathcal{M}$(G) dont les coefficients (m_{ij}) sont définis par :

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } (x_i, x_j) \in A \\ 0 \text{ si } (x_i, x_j) \notin A \end{cases}$$

Afin de différencier le graphe simple du graphe orienté, nous allons construire la matrice de deux graphes semblables à ceci près que l'un sera orienté et l'autre non.

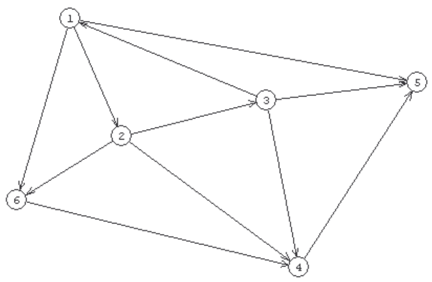
Graphe non-orienté



$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les lignes et les colonnes de cette matrice représentent les arêtes et les sommets du graphe :
Si un arc relie le sommet 1 au sommet 5, on note un 1 à la position (1,5) et à la position (5,1) étant donné que les arcs ne sont pas orientés. Si il n'y a aucun arc reliant ces deux sommets on note un 0 à ces deux positions.

Digraphe



$$\mathcal{M}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Contrairement aux graphes non-orientés, les arêtes d'un digraphe possèdent un sens qui doit nécessairement être visible sur la matrice. Elle se construit donc de la sorte :
Si un arc part du sommet 1 pour rejoindre le sommet 6, on note un 1 à la position (1,6) et pas à la position (6,1) qui signifierait qu'un arc part du sommet 6 pour rejoindre le sommet 1.

On observe que dans le cas d'un graphe simple, la matrice est symétrique par rapport à la diagonale. Par ailleurs, les éléments de cette diagonale correspondent aux boucles.

✘ *Propriétés*

Avec les notations précédentes, nous avons les propriétés immédiates suivantes :

$\forall\ i \in \{1,\ldots,n\}$

- $d^+(x_i)=\sum_{j=1} m_{ij}$
- $d^-(x_i)=\sum_{j=1} m_{ji}$
- $\sum_{ij} m_{ji} = \sum_{i=1}^{n} d^+(x_i) = \sum_{i=1}^{n} d^-(x_i) = |A|$

✘ *Théorème*

> Soit G(X,A), un graphe orienté, avec $X = \{x_1;\ x_2 : : : ;x_n\}$ de matrice d'adjacence $\mathcal{M}(G) = (m_{i,j})$.
> Pour tout entier naturel k, non nul, notons $\mathcal{M}^k = (m^{(k)}_{i,j})$.
> Alors $m^{(k)}_{i,j}$ vaut le nombre de chemins de longueur k, **différents**, allant du sommet x_i au sommet x_j.

Démonstration par récurrence

- AMORCE :

k=1 : $m^{(1)}_{i,j} = m_{i,j} =$ (*par définition*) le nombre d'arc (*1 ou 0*) entre x_i et x_j.

- PAS RÉCURRENT :

On suppose que la relation est vraie jusqu'à l'ordre k-1
Soit $m^{(k-1)}_{i,j}$ vaut le nombre d'arcs de longueur k-1

- <u>CONCLUSION :</u>

$$\mathcal{M}^k=(m^{(k)}_{i,j}) = \mathcal{M}^{(k-1)} x \mathcal{M}$$

$$\text{avec } m^{(k)}_{i,j} = \sum_{l=1}^{n} \boxed{m^{(k-1)}_{i,l} . m_{l,j}}$$

$$m^{(k-1)}_{i,l} \, . \, m_{l,j}$$

Selon le pas récurrent et la thèse cela équivaut au nombre de chemins partant de i pour rejoindre l.

C'est un terme de la matrice d'adjacence qui signifie qu'un arc part ou non de l vers j selon qu'il valle 0 ou 1.

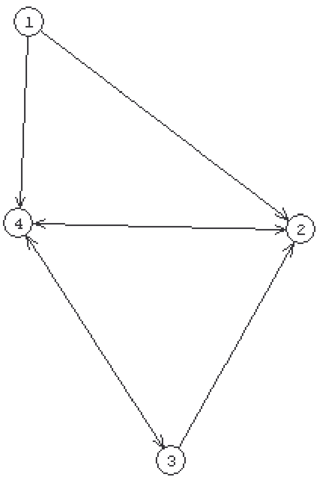
Σ

Si le deuxième terme vaut 0, le produit vaut 0 et donc le « chemin matriciel » n'est pas compté dans la somme des chemins partant du sommet vers l'autre. Tandis que si le deuxième terme vaut 1, il est compté dans la somme.

Au total, nous avons le nombre de chemins de longueur (k-1) (*pour se rendre de i à l*) + 1 (*de l à j*).

C'est grâce à ce théorème que nous allons résoudre notre problème.

4. Résolution du problème



Représentons donc notre parcours sous la forme d'un digraphe (ci-contre).
Construisons donc la matrice de notre digraphe, la matrice $\mathcal{M}$.

$$\mathcal{M}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Chaque arête représente un parcours de 0,5 km. Les éléments de la matrice $\mathcal{M}^2$ donneront les chemins de longueur 2x0,5 km= 1km.
Calculer le nombre de trajets de S_1 à S_4 de longueur égale à 1,5 km revient à calculer $m^{(3)}_{1,4}$.
Il faut simplement calculer $\mathcal{M}^3$.

$$\mathcal{M}^3=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & \boxed{2} \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Il y a deux chemins de longueur 1,5 km partant de S_1 vers S_4

Etant donné que les parcours partent toujours de S_1 pour arriver en S_4, il suffit de regarder le nombre qui se trouve à la position $(1,4)$.On peut donc conclure qu'il y a deux parcours possible de 1,5 km car chaque arête représente une distance de 500m.

Calculer le nombre de trajets de S_1 à S_4 de longueur égale à 2 km revient à calculer $m^{(4)}_{1,4}$, de 2,5 km revient à calculer $m^{(5)}_{1,4}$. Soit :

$$\mathcal{M}^4 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & \boxed{2} \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Il y a également 2 chemins de longueur 4 partant de S_1 vers S_4.

$$\mathcal{M}^5 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & \boxed{3} \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Il y a 3 chemins de longueur 5 partant de S_1 vers S_4.

Il est possible d'effectuer 2 trajets de 1,5 km, 2 trajets de 2,0 km et 3 trajets de 2,5 km tous différents les uns des autres.
Si cette technique nous montre combien de chemins sont possibles, elle ne nous indique pas cependant ces chemins.

- Dans le cas des circuits à 1,5 km, on voit aisément que les parcours sont s_1-s_4-s_2-s_4 et s_1-s_4-s_3-s_4.
- Dans le cas des circuits à 2km, on a les parcours s_1- s_2 - s_4-s_3-s_4 et s_1-s_4-s_3- s_2 -s_4.
- Dans le cas des circuits à 2,5 km, on a les parcours s_1-s_4-s_2-s_4-s_2-s_4 , s_1-s_4-s_3-s_4-s_3-s_4 et s_1-s_4-s_2-s_4-s_3- s_4.

Autre problème : le voyageur de commerce

Lorsqu'un chemin existe entre deux sommets dans un graphe, on se pose rapidement **la question du plus court chemin possible entre ces deux sommets**. Tant que le graphe est de taille raisonnable, il n'y a pas de problème ... Mais dès que le graphe comporte plusieurs dizaines de sommets et d'arêtes, trouver le plus court chemin entre deux points devient vite un casse-tête ! Résoudre ce problème va donc consister à proposer un algorithme, aussi rapide que possible.

1. Définitions

✘ *Graphe valué ou pondéré*

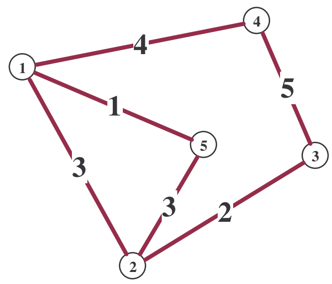
Un graphe est **valué** lorsqu'à chaque arête ou arc est associé un nombre réel.

Si ce nombre est positif, on parle de poids et de graphe **pondéré**.

Lorsque les nombres (si compris entre 0 et 1) représentent des probabilités, on peut parler de graphe **probabiliste**.

Soit un graphe G=(X, A). Chaque arête a_i (arc si il s'agit d'un graphe orienté) est munie d'un **poids** p_i .

Un chemin C=< a_1, a_2, ..., a_n > possède un poids qui est la somme des poids des arcs qui constituent le chemin.



Dans le graphe pondéré ci-dessus,
le poids de la chaîne 1-2-3-4 est 3+2+5=10.

✘ *Exemple d'application*

Un exemple classique de graphe pondéré est celui où on pondère des trajets routiers en termes de temps, de distance ou de coût (carburant, péage, …). Trouver le chemin le plus court consiste alors à trouver le chemin le plus rapide, le moins distant ou le moins coûteux. De nos jours, l'algorithme du plus court chemin est utilisé dans plusieurs applications informatiques telles que les GPS.

Concrètement :

Un automobiliste doit se rendre de Durbuy à Arlon. Si vous observez la carte ci-dessous, vous remarquez qu'un faisceau de trajectoires possibles s'offre à lui : il peut passer par Bastogne, Marche, …

Selon qu'il cherche à limiter son kilométrage ou son temps de parcours, sa consommation ou le coût total du trajet, il peut souhaiter ne rouler que sur des nationales, que sur l'autoroute, ou alterner les deux. Qui plus est, alerté sur la densité du trafic, il peut être amené à effectuer des choix plus complexes.

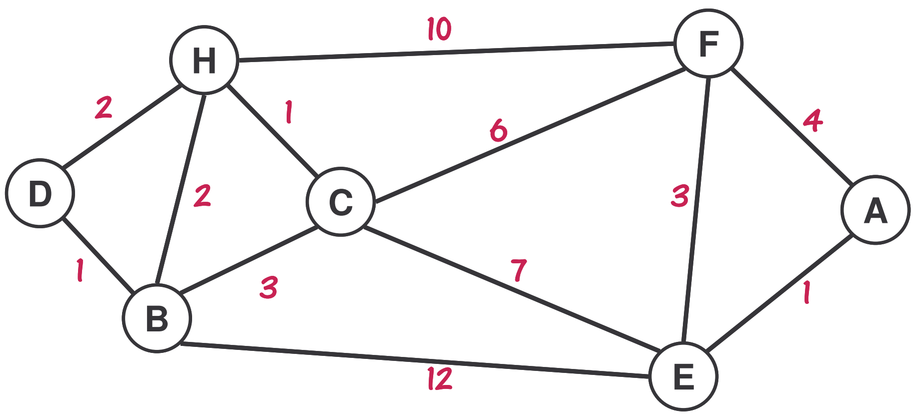
La première partie du travail consiste à construire un graphe dont les sommets représentent les villes (fictivement, nous avons imaginé les villes B, C, E, F, H).

Ensuite, il s'agit de pondérer le graphe, c.-à-d. fixer les critères pertinents de l'optimisation (la distance, le temps, le coût, une combinaison de ces paramètres...) et de calculer la « distance » entre les sommets au sens de ces critères.

Pour autant que l'état du trafic soit connu sur l'ensemble de ce réseau, nous pouvons créer arbitrairement un « coefficient de trafic » entre 1 et 100, la valeur 1 signifiant que le trafic est parfaitement fluide (et donc que nous pouvons rouler à la vitesse maximale autorisée)

Par exemple :

- si la distance F - A est de 50 km. Il s'agit d'une nationale, ce qui signifie que nous pouvons rouler à 90 km/h, soit un temps de trajet de 0,56 h. Mais le trafic légèrement perturbé nous amène à pondérer ce trajet d'un coefficient 7, soit une « distance », à notre sens, de 0,56 x 7 = 3,9 arrondi à 4.
- la distance B-E est de 25 km. Il s'agit également d'une nationale, le temps de trajet est donc de 0,28 h. Malheureusement, le trafic est extrêmement difficile, et nous décidons de pondérer ce trajet d'un coefficient 43, soit une « distance » de 0,28 x 43 = 12.
- On répète ce calcul pour l'ensemble des trajets et nous obtenons le graphe suivant :



Bien entendu, la longueur de l'arête sur le dessin n'a aucun rapport avec son poids.

La modélisation en termes de graphe pondéré est terminée, il s'agit maintenant d'effectuer l'optimisation.

L'algorithme de Dijkstra

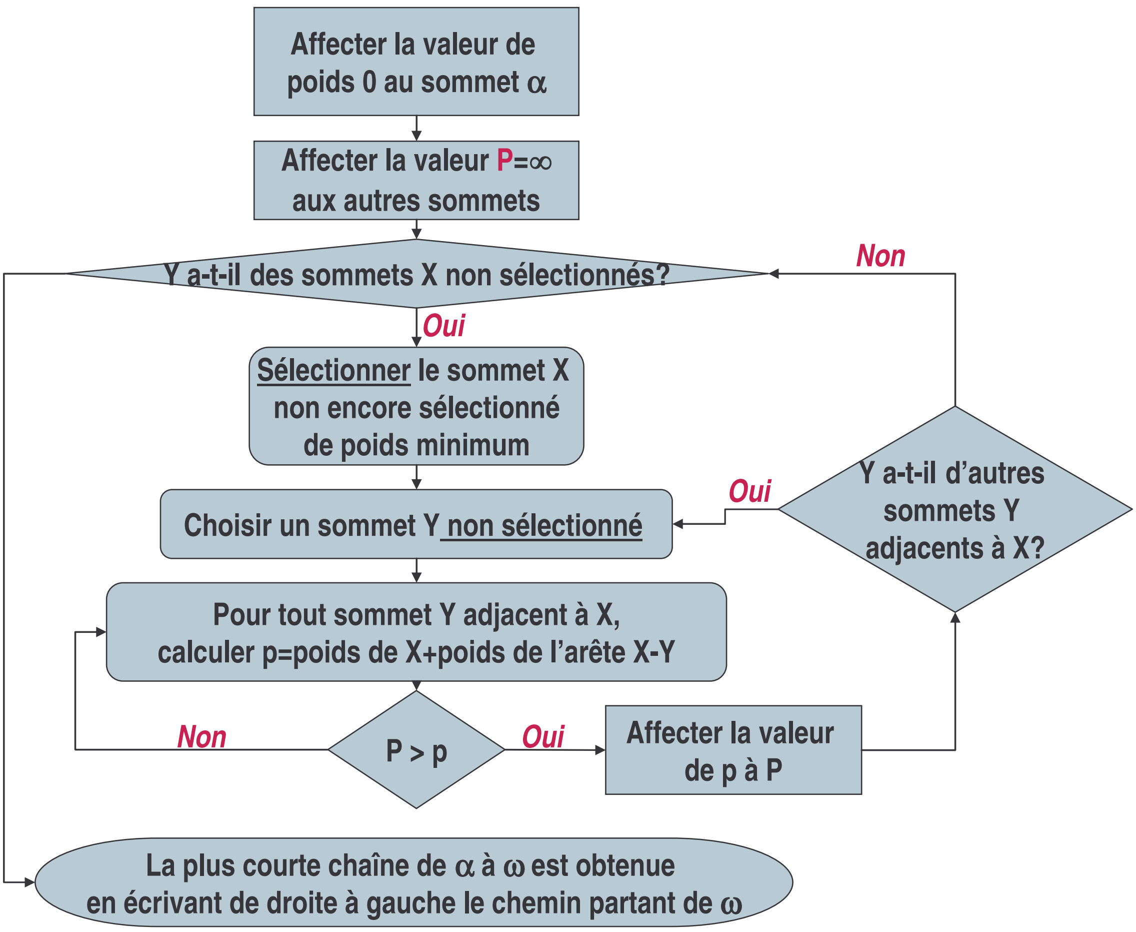
Edgser Wybe Dijkstra (1930-2002) a proposé en 1959 un algorithme qui permet de calculer le plus court chemin entre un sommet particulier et tous les autres.

C'est l'un des plus efficaces pour traiter les problèmes de plus court chemin. Grâce à la puissance du traitement informatique, il est utilisé par les logiciels d'optimisation de trajets réels (Navigateurs GPS, Site R.A.T.P....) ou virtuels (routage internet).

Dans un problème de plus court chemin, on considère un graphe G=(X, A). Chaque arête a_i (arc si il s'agit d'un graphe orienté) est munie d'un poids p_i . Un chemin C=< a_1, a_2, ..., a_n > possède un poids qui est la somme des poids des arcs qui constituent le chemin.
Le plus court chemin d'un sommet D à un sommet A est le chemin de poids minimum qui va de D à A.

L'algorithme de Dijkstra est un algorithme glouton. Un algorithme glouton est un algorithme qui, confronté à un choix, choisit ce qui lui semble le meilleur pour avancer. C'est un choix local, et on espère que la succession de choix locaux va amener à une " bonne solution ".

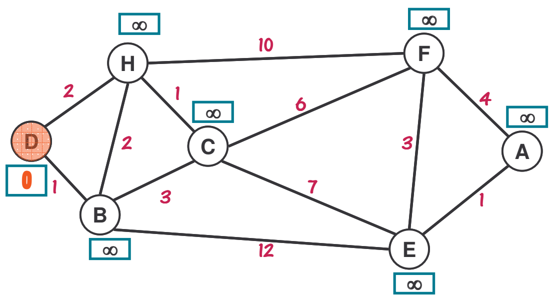
Cet algorithme ne fonctionne que s'il n'y a pas de valeur négative dans le graphe. La démarche algorithmique peut être symbolisée de la façon suivante :



Ce qui donne dans le cas de notre exemple :

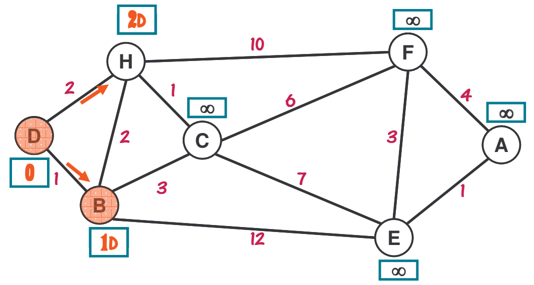
On affecte la valeur 0 au sommet α=**D**
et la valeur ∞ aux autres sommets.

D est le sommet de poids minimum
et démarre l'algorithme.



Du sommet **D**, on peut se rendre en **H** ou en **B** avec des chemins de poids respectifs 2 et 1.

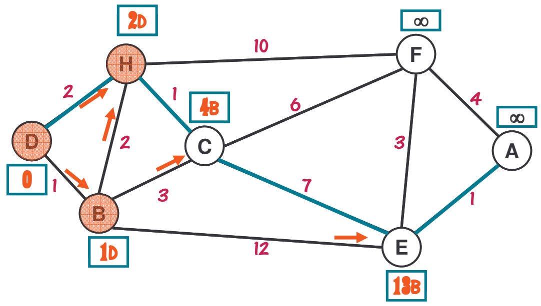
B devient le sommet de poids minimum non encore sélectionné.



Du sommet **B**, on peut se rendre en **H**, **C** ou **E**.

Le chemin pour se rendre de **D** à **H** passant par **B** n'étant pas plus court que le précédent, on ne le change pas. Par contre, on affecte les poids de chemin 3 et 12 aux sommets **C** et **E**.

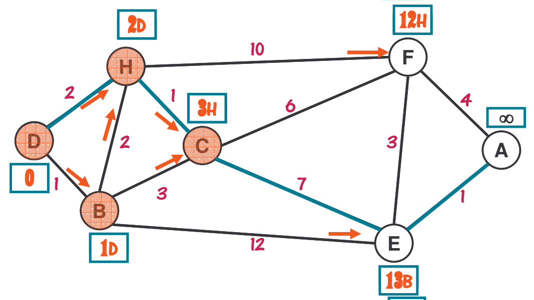
H devient le sommet de poids minimum non encore sélectionné.



Du sommet **H**, on peut se rendre en **C** ou **F**.

Le chemin pour se rendre de **D** à **C** en passant par **H** étant plus court que le précédent, le poids de **C** devient 3 et on affecte les poids de chemin 12 à **F**.

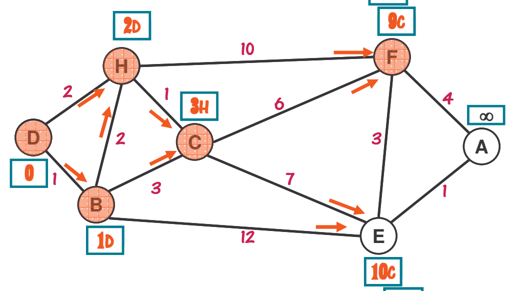
C devient le sommet de poids minimum non encore sélectionné.



Du sommet C, on peut se rendre en **E** ou **F**.

Le chemin pour se rendre de **D** à ces sommets en passant par **C** étant plus court que le précédent, leur poids devient respectivement 10 et 9.

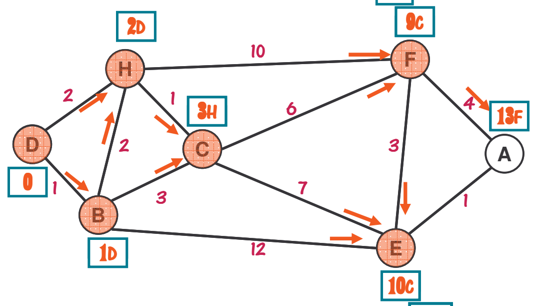
F devient le sommet de poids minimum non encore sélectionné.



Du sommet **F**, on peut se rendre en **E** ou **A**.

On affecte la valeur 13 à **A** et
on garde inchangé le sommet **E**.

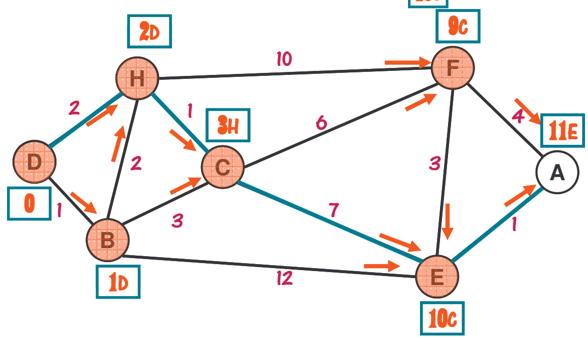
E devient le sommet de poids minimum non encore sélectionné.



Du sommet **E**, on peut se rendre en **A** avec un chemin de poids inférieur au précédent

Le chemin pour se rendre de **D** à **A** se lit à l'envers en partant de **A** :

D – H – C – E - A



Remarques :

> Explorer *tous les chemins possibles* est une étape indispensable à la recherche.
> Il peut parfois y avoir plusieurs réponses possibles à un problème d'optimisation comme

> celui-là.
> Le chemin trouvé ne comporte jamais de cycle : tourner en rond augmente le poids du chemin !

L'algorithme de Dijkstra est aussi utilisé dans les technologies internet comme dans le protocole OSPF (open shortest path first) qui permet un routage internet très efficace. Le routage est le mécanisme par lequel des chemins sont sélectionnés dans un réseau pour acheminer les données d'un expéditeur jusqu'à un ou plusieurs destinataires.

✘ *Le voyageur de commerce*

Trouver le trajet le plus court pour passer par un certain nombre de villes et revenir à la ville de départ : voici un cas particulier de la recherche du plus court chemin qui se combine à la recherche d'un cycle Hamiltonien.

L'énoncé du *problème du voyageur de commerce* (en anglais **Traveling Salesman Problem** ou **TSP**) est le suivant : étant donné *n* points (des « villes ») et les distances séparant chaque point, trouver un chemin de longueur totale minimale qui passe exactement une fois par chaque point et revienne au point de départ.

Le voyageur de commerce souhaite passer

- ✘ par tous les points d'un parcours,
- ✘ par le trajet le plus court,
- ✘ sans passer deux fois au même endroit.

Pour un nombre limité de villes, ce problème est très simple, mais dès que le nombre de villes croît, il devient beaucoup plus complexe. Pour le comprendre, calculons le nombre de possibilités à calculer dans différentes situations.

Soit **n** villes, toutes reliées entre elles (K_n). Nous partons de la ville V_1 et nous devons y revenir (partir d'une autre ville ne change rien, puisque nous effectuons un cycle).
n-1 villes sont adjacentes à V_1 (=n-1 arêtes à tester dans l'algorithme). De chacune de ces villes, nous pouvons partir dans n-2 directions, et ainsi de suite. Soit (n-1) ! trajets à examiner.
Ces trajets pouvant être effectués dans les 2 sens, il reste un total de $\frac{(n-1)!}{2}$ possibilités.

- Voyons en termes de temps d'analyse ce que cela représente (considérant que la vitesse maximum des ordinateurs d'aujourd'hui est de 1 nanoseconde pour examiner une combinaison) :

Nbre de villes n	Nbre de trajets	Temps de traitement
10	(9 !)/2=181 440	$1,8.10^{-4}$ s
100	(99 !)/2=$4,7.10^{155}$	$4,7.10^{146}$ s Soit en gros $4,7.10^{139}$ [*]années

[*] En comparaison, l'âge de l'univers est estimé à 13,7 milliards d'années.

Pour résoudre ce problème, il faut donc d'autres algorithmes de plus courts chemins que celui de Dijkstra.

Ainsi, dans cette quête, on utilise aussi l'**algorithme génétique** qui consiste à étudier une population d'individus (des trajets permettant de relier les N villes) et de la faire évoluer de la même manière qu'une population dans la théorie de l'évolution de Darwin. On combine entre eux les parcours en sélectionnant les meilleurs parcours (stratégie élitiste) tout en essayant d'éviter trop de "consanguinité" (ne pas toujours utiliser les parcours les plus courts) et de provoquer quelques "mutations génétiques" (des déformations aléatoires d'un parcours). Nous n'avons pas étudié ce type d'algorithme.

Le Traveling Salesman Problem est l'un des problèmes les plus étudiés en algorithmique. De nombreux concours, avec prix importants, sont organisés depuis de nombreuses années et aujourd'hui publiés sur la Toile. En témoigne cette affiche publiée par Proctor and Gamble en1962. Le concours lancé recherche le meilleur cycle TSP à travers 33 villes indiquées sur le poster.

Conclusion

Les graphes constituent donc une méthode de pensée qui permet de modéliser une grande variété de problèmes concrets en se ramenant à l'étude de sommets et d'arcs.

La théorie des graphes permet de générer des circuits optimisés et de gérer des réseaux (routiers, de communication, d'eau de gaz, …), d'ordonnancer des tâches et de gérer des plannings. Elle est la clé de l'intelligence artificielle avec la notion du « plus court chemin ».

Ces nombreuses applications font de la théorie des graphes un outil appréciable d'"aide à la décision » (en recherche opérationnelle).

En apparence, sa mise en œuvre est simple et ludique, voire enfantine.

C'est une discipline jeune : l'histoire de la théorie des graphes débute peut-être avec les travaux d'Euler au XVIIIe siècle et trouve son origine dans l'étude des ponts de Königsberg mais ne constitue une branche à part entière des mathématiques que depuis le début du XXsiècle.

Elle est dynamique, encore en construction aujourd'hui grâce aux avancées technologiques. D'ailleurs, les derniers travaux en théorie des graphes sont souvent effectués par des informaticiens, du fait de l'importance qu'y revêt l'aspect algorithmique.

Intéressé ? Certains problèmes apparemment élémentaires attendent encore leurs solutions … et c'est plutôt bien payé !

Bibliographie

Nous avons utilisé le logiciel gratuit **GRIN40** qui permet de calculer le nombre chromatique d'un graphe, de déterminer un chemin le plus court… bref, qui fait presque tout.
Il est téléchargeable à l'adresse : http://www.geocities.com/pechv_ru/.

- H. MELOT, *Les graphes au quotidien,* Journée des Mathématiques et des Sciences, Jeudi 25 mars 2004, *hadrien.melot@umh.ac.be,* (Service d'Informatique Théorique, Université de Mons-Hainaut 6, Av. du Champ de Mars, 7000 Mons), consulté le 27 octobre 09.

- E. SIGWARD, *Introduction à la théorie des graphes, e.sigward@ac-nancy-metz.fr ,* consulté le 20 octobre 09.

- D. MULLER, *Introduction à la théorie des graphes,* 2008, *www.apprendre-en-ligne.net/graphes,* consulté le 20 octobre 09.

- P. BORNSZTEIN, *Cours - Théorie des graphes,* 2003, Stage olympique de Saint-Malo.

- P. LOPEZ, *Cours de Graphes,* 2005, LAAS–CNRS

- PR. TRUONG MY DUNG, *Graphe hamiltonien* , *www.fit.hcmuns.edu.vn/~tmdung/courses/TGraphes/Slides/Graphe%20Hamiltonien.ppt#282,12, Propriétés*, consulté en décembre 2009

- DAVID DARLING, *Icosian game*, *www.daviddarling.info/encyclopedia/I/Icosian_Game.html*, consulté en décembre 2009

- THERESE EVEILLEAU*, Les solides de Platon*, *pagesperso-orange.fr/therese.eveilleau/pages/truc_mat/textes/platon.htm*, consulté en décembre 2009

- GERARD E., 2006, *Echecs et cavalier*, *villemin.gerard.free.fr/Puzzle/EchecCav.htm*, consulté en décembre 2009

- GILLES L., 2001, *Le cavalier hamiltonien*, sur *glouise.developpez.com/Hamilton/*, consulté en décembre 2009

- BAYLE G., 2006, *Problème du cavalier*, sur *bayledes.free.fr/carres_magiques/Cavaliers.html*, consulté en décembre 2009