# Les BASES nous rendent des COMPTES

## Comment Les Simpson bouleversent notre arithmétique.

Marie ROBERT, Louis PEETERS, Joséphine ANGE, Alexia LAMBREMONT, Laura WATY, Jacques CARTUYVELS, David MOUREAUX, Marie CLARINVAL, Justine VAN DE VELDE, Sandrine BRASSEUR, Gilles HASTIR, François GEORIS, Marvyn THIRY, Samuel CHENIAUX, Valère PIERARD

*Sous la supervision de Mme DE BLIECK*

Nous tenons à remercier Monsieur Michel RIGO, chercheur et professeur de mathématiques à l'Université de Liège, qui nous a consacré un peu de son temps pour répondre à nos questions et nous offrir de nouvelles pistes de recherche. Cette rencontre fut très enrichissante et, grâce à lui, nous avons pu acquérir une meilleure vision des systèmes de numération positionnels et apprécier leur utilité dans la vie courante.

Un tout grand merci également à Madame Maja VOLKOV, chercheur et professeur de mathématiques à l'Université de Mons, qui a également apporté son soutien à notre projet par voie épistolaire.

# TABLES DES MATIERES

**ANNEXES**

# COMMENÇONS SUR DE BONNES BASES…

## INTRODUCTION

Compter… l’homme compte et manipule les nombres de façon quotidienne. Allant du comptage de bétail jusqu’à la création de programmes informatiques extrêmement complexes, la numération se décline en des dizaines de milliers d’utilités souvent méconnues du grand public. C’est pourquoi nous avons voulu découvrir et creuser cet aspect fondamental des mathématiques, qu’est la numération.

Dans un épisode[1] de la célèbre série créée par Matt Groening *Les Simpson*, le nouveau professeur de Bart emploie une façon bien originale pour enseigner la table de multiplication par 7. Jugez plutôt :

**Figure 1 :**

*Une table de multiplication dans la série Les Simpson.*


[1] Bart Gets A 'Z' (LABF15, 10/4/09), © Twentieth Century Fox

Rien d'anormal apparemment, sauf si on pense à la particularité physique des personnages de cette série : ils ne possèdent que quatre doigts sur chaque main, ce qui fait un total de huit doigts et non dix comme nous! Dès lors, compter jusqu'à dix n'a que peu de sens puisque leur système de comptage naturel devrait être octal et non décimal, de sorte qu'à Springfield, les tables d'addition et de multiplication, différeraient fortement des nôtres. C'est ce que nous avons voulu apprendre avec ce travail : comment les Simpson et leur comptabilité sur huit doigts bouleversent notre arithmétique.

Nous avons ainsi pu découvrir que, même si notre système de base décimale nous paraît si logique et universel, de nombreux peuples ont effectué les opérations mathématiques dans différents systèmes, tous aussi spécifiques les uns que les autres. Notre recherche nous a donc permis d'étudier d'anciennes civilisations, parfois méconnues, telles que les Babyloniens, les Mayas, les Grecs ou encore les Egyptiens et de nous intéresser à leur propre système de numération.

La première partie de ce travail développe donc ces anciens systèmes que nous pouvons classer en trois catégories distinctes : les systèmes additifs où les symboles s'additionnent pour reconstituer le nombre, les systèmes hybrides qui utilisent des symboles pour désigner les rangs et d'autres pour désigner les coefficients et enfin, les systèmes positionnels dont fait partie notre propre système de numération.

Nous nous sommes ensuite plus fortement intéressés au système positionnel de base dix, que nous utilisons couramment, et surtout aux bases qu'il convenait d'employer : comment convertir l'écriture d'un nombre dans un système positionnel de base différente de la base dix ? La deuxième partie de ce document décrit ces méthodes de changements de base. Cette étude aboutit à la confection d'un programme informatique permettant de réaliser cette conversion d'une base à l'autre.

Dans cette partie, nous avons également eu l'occasion de développer certains systèmes « exotiques » que sont la numération de Zeckendorf, fondée sur la suite de Fibonacci, les systèmes d'Avizienis qui autorisent les chiffres négatifs ou encore le *Tau-system* qui, de façon surprenante, repose sur l'utilisation d'une base irrationnelle. Nous avons ainsi pu dégager les propriétés et les utilités possibles de ces systèmes.

Nous ne pouvions dès lors pas négliger les systèmes binaire, octal et hexadécimal, utilisés dans tout domaine touchant à l'informatique. Ainsi, nous avons exploré comment un ordinateur code un nombre en employant par exemple le codage BCD ou encore, comment il les manipule au dans la soustraction.

Après cela, nous avons pu revenir sur notre question initiale : à quoi ressemblent les opérations usuelles dans une autre base que la base décimale ? Et finalement, comment est-on censé calculer à l'école de Springfield en utilisant le système octal ?

C'est pour répondre à cette interrogation que dans cette troisième et dernière partie, nous explorons les opérations basiques enseignées dans les écoles primaires tout en cherchant à comprendre quels effets auraient leur manipulation dans des bases différentes de notre base décimale. Nous constatons ainsi que les mathématiques à l'école de Springfield se retrouvent affectées, différentes des nôtres ; en cause : la base octale chamboulant les règles des opérations. Nous nous sommes ensuite attardés sur les opérateurs du calcul mental et sur la preuve par neuf, qui en base huit devient une preuve par sept.

Enfin, nous nous sommes amusés à réinterpréter les critères de divisibilité en base b. Vous vous souvenez certainement de la façon de reconnaître à sa représentation un nombre divisible par 2, par 3, par 5 ou par 11 ? Le changement de base modifiant la syntaxe des nombres, ces recettes apprises à l'école en sont également métamorphosées. Pour réinventer et généraliser ces critères de divisibilité en base b, nous avons employé les congruences et l'arithmétique modulaire basées sur la division euclidienne. L'étude des critères de divisibilité nous a permis de découvrir l'existence d'outils pratiques comme le ruban de Pascal ou les automates.

Après tout cela, ce sera à vous de compter en Simpson !

## COURS DE PESU EN 6 GT –ISL MARCHE-EN-FAMENNE

# Math is $f(u)^n$

*Travail réalisé dans le cadre des événements*

## ANNÉE SCOLAIRE 2013-2014