REGLEMENTS DE COMPTES

ARITHMETIQUE EN BASE b

Nous voici donc arrivés à la question qui a motivé toutes nos recherches : comment les Simpson calculent-ils avec leurs 8 doigts ? Pour y répondre, nous avons adapté au système octal les méthodes qui nous permettent de réaliser nos opérations de tous les jours. C'est ainsi que vous découvrirez dans cette partie des techniques de calcul mental, une preuve par neuf qui n'utilise pas toujours « 9 » et des critères de divisibilité en base b. Pour parvenir à ces résultats, nous avons utilisé des outils tels que l'arithmétique modulaire, les rubans de Pascal et les automates.

I. OPERATIONS EN BASE B

Nous savons à présent que notre système est positionnel décimal. Le caractère positionnel où la place du chiffre est décisive dans le nombre détermine bien sûr nos méthodes de calculs, mais quel est l'effet d'un changement de base sur des opérations courantes telles l'addition et la multiplication ?

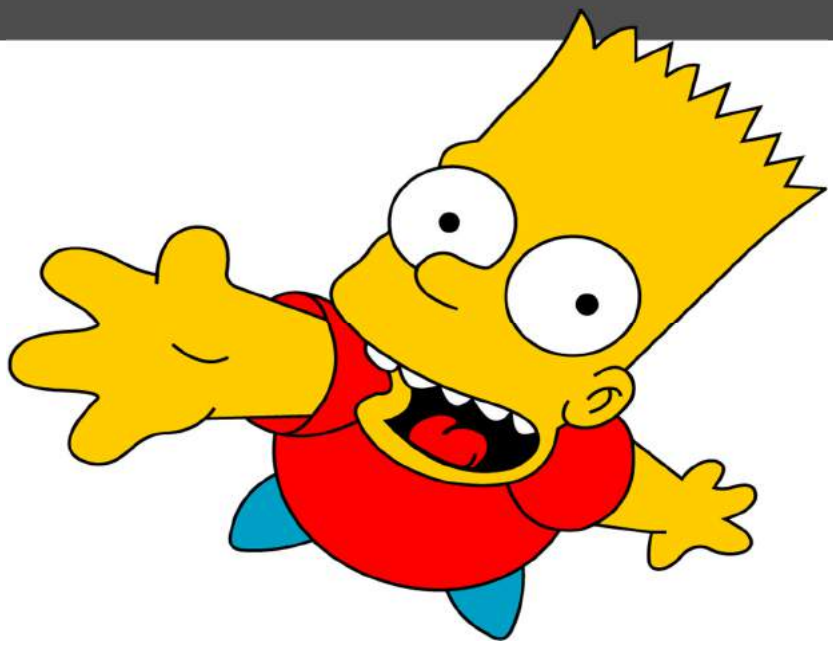


Figure III.1: *Les Simpson possèdent 4 doigts par main. Ils devraient donc employer un système octal.*

Propriétés fondamentales

Premièrement, il va de soi que la base ne détermine pas les propriétés algébriques de l'addition et la multiplication. Voici un rappel de ces propriétés.

L'addition usuelle + et la multiplication usuelle x sont, comme vous le savez sûrement, deux lois de **composition interne**.

$$\forall a,b \in \mathbb{R} \rightarrow a+b \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad a \times b \in \mathbb{R}$$

Par ailleurs, quelle que soit la base de numération dans laquelle nous décomposons un nombre, les propriétés de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{R}$ ne changent pas : d'un point de vue algébrique ($\mathbb{R}$, +, x) est un **champ**.

En effet, ($\mathbb{R}$, +) est un **groupe commutatif** vérifiant :

L'associativité :

$$\forall x,y,z\in\mathbb{R},(x+y)+z=x+(y+z)$$

La commutativité :

$$\forall x,y\in\mathbb{R},x+y=y+x$$

La présence d'un élément neutre : 0

$$\forall x\in\mathbb{R},x+0=0+x=x$$

La présence d'un symétrique :

$$\forall x\in\mathbb{R},\exists x'\in\mathbb{R}:x+x'=x'+x=0$$

De plus, dans $\mathbb{R}$, la multiplication

Est **Associative :**

$$\forall x,y,z\in\mathbb{R},(x\times y)\times z=x\times(y\times z)$$

Est **Commutative :**

$$\forall x,y\in\mathbb{R},x\times y=y\times x$$

Possède **un élément neutre : 1**

$$\forall x\in\mathbb{R},x\times 1=1\times x=x$$

Présente **un symétrique pour tout réel non nul :**

$$\forall x\in\mathbb{R}_0,\exists x'\in\mathbb{R}:x\times x'=x'\times x=1$$

Enfin, la loi x est **distributive** par rapport à la loi + :

$$\forall a,b,c\in\mathbb{R}:a\times(b+c)=a\times b+a\times c$$

Et $\forall a,b,c\in\mathbb{R}:(b+c)\times a=b\times a+c\times a$

Ce sont ces propriétés que nous utilisons pour établir les différentes méthodes de calcul mental apprises à l'école primaire.

Pratique de l'addition et de la soustraction

Dans un système de numération positionnel de base b, le nombre de chiffres disponible est limité à b. C'est pour cette raison que notre système décimal emploie 10 symboles (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), que le système binaire majoritairement utilisé en informatique n'en emploie que deux (0 et 1) et que le système octal qu'utiliseraient les Simpson en manipule 8 (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7).

Ainsi, pour additionner des nombres dans une base, il suffit de connaître le résultat de la somme des chiffres du système entre eux et effectuer un report si le résultat est strictement supérieur à b-1.

Voici les tables d'addition pour les systèmes décimal, binaire et octal.

SYSTÈME BINAIRE

+	0	1
0	0	1
1	1	10

SYSTÈME OCTAL

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	10
2	2	3	4	5	6	7	10	11
3	3	4	5	6	7	10	11	12
4	4	5	6	7	10	11	12	13
5	5	6	7	10	11	12	13	14
6	6	7	10	11	12	13	14	15
7	7	10	11	12	13	14	15	16

SYSTÈME DÉCIMAL

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Quand les termes composant l'addition sont codés en utilisant plusieurs chiffres, on peut alors recourir à un **abaque** dans le but de faciliter notre calcul : c'est le principe de l'addition écrite.

En base 10, l'abaque est séparé en différentes colonnes représentant respectivement les unités, les dizaines, les centaines,… ou autrement dit, ces colonnes représentent les unités, les dizaines, les dizaines^2, les dizaines^3,…

Dizaines^n	**Dizaines^{n-1}**	**…**	**Dizaines^2**	**Dizaines**	**Unités**
10^n	**10^{n-1}**	…	**10^2**	**10^1**	**10^0**
…	**…**		**…**	**…**	**…**

En base b, l'abaque est construit sur le même principe avec différentes colonnes représentant respectivement les unités, les b-aines, les b-aines^2, les b-aines^3,....

Soit un nombre $N=\overline{a_n...a_2a_1a_0}^b$ décomposé en base b. Voici comment le placer dans un abaque :

b-aines^n	**b-aines^{n-1}**	**…**	**b-aines^2**	**b-aines**	**Unités**
b^n	**b^{n-1}**	…	**b^2**	**b^1**	**b^0**
a_n	a_{n-1}	…	a_2	a_1	a_0

De plus amples explications…

Lors d'une **addition écrite**, nous superposons les nombres à additionner dans l'abaque. Ensuite, nous effectuons la somme de ces chiffres dans chacune des colonnes (en partant de la colonne la plus à droite, vers la gauche). Lorsque la somme des chiffres d'une colonne **dépasse b-1**, alors nous faisons un report équivalant à la partie entière de la division de la somme obtenue par la base b et nous indiquons dans la colonne ad hoc le reste de cette division.

Voici donc des exemples d'une addition dans les différentes bases dont nous avons étudié les tables d'additions, quelques lignes plus tôt :

SYSTÈME BINAIRE

Reports →		**+1**	**+1**		
	1	0	1	1	
+			1	1	0
	1	0	0	0	1

SYSTÈME OCTAL

Reports →			**+1**	**+1**	
	2	4	2	3	5
+	1	3	1	4	7
	3	7	4	0	4

SYSTÈME DÉCIMAL

Reports →		**+1**			**+1**	
		1	4	5	2	6
	+	5	7	2	1	9
		7	1	7	4	5

La soustraction peut être également résolue avec l'emploi d'un **abaque**, comme dans l'addition. Le nombre à soustraire est alors toujours placé en seconde ligne dans l'abaque.

Nous soustrayons les différents chiffres colonnes par colonnes en partant du rang de droite. Lorsque le chiffre du nombre à soustraire est inférieur à celui de la première ligne, nous obtenons le résultat directement. Lorsque **le chiffre de la deuxième ligne** d'une colonne est **de valeur supérieure** à **celui de la première ligne** de la même colonne, nous effectuons un **emprunt dans le rang supérieur** et nous ajoutons la valeur b pour pouvoir continuer la soustraction.

Nous venons donc d'apprendre comment effectuer une addition et une soustraction en base b. Mais après réflexion, n'y a-t-il pas moyen de faire encore plus simple ?

En effet, chaque soustraction peut-être perçue comme une addition. C'est ce que nous appellerons la ***complémentation***. Cette méthode est exclusivement utilisée dans la soustraction.

Soustraction par complémentation

Effectuer la complémentation à un nombre quelconque revient à le soustraire à la puissance de b supérieure à celui-ci (on appelle dès lors cette technique la compensation à b).

Ainsi, en base décimale, nous pouvons facilement trouver le complément à 10 de 4231.

Emprunts →		9	9	9	10
	~~1~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~
-		4	2	3	1
		5	7	6	9

Ainsi, en base octale, trouver le complément d'un nombre à 8, revient à soustraire chaque chiffre de rang n différent de 0 à 7 et le chiffre de rang 0 à 8.

Trouvons donc le complément à 8 de 4231.

		7	7	7	8
-		4	2	3	1
		3	5	4	7

Maintenant, pour utiliser la complémentation dans une soustraction de façon efficace, voici une illustration.

Pour obtenir la différence $x - y$, il faut calculer le complément z à y et ensuite l'ajouter à x. Après cela, nous soustrayons simplement de la somme $(x + z)$ la puissance supérieure dans la base b. Et nous, obtenons le résultat voulu.

PETITS EXEMPLES

En base décimale : $\overline{5014}^{10} - \overline{2231}^{10} = ?$

Nous trouvons le complément de 2231 à 10.

		9	9	9	10
-		2	2	3	1
		7	7	6	9

Nous effectuons l'addition de ce complément à 5014.

Reports →		+1			+1	
			5	0	1	4
	+		7	7	6	9
		1	2	7	8	3

Et on soustrait 10 000 de cette somme.

		1	2	7	8	3
	-	1	0	0	0	0
			2	7	8	3

Et on conclut :

$$\overline{5014}^{10} - \overline{2231}^{10} = \overline{2783}^{10}$$

En base octale : $\overline{5014}^{8} - \overline{2231}^{8} = ?$

Nous trouvons le complément 2231 à 8.

			7	7	7	8
	-		2	2	3	1
			5	5	4	7

Nous effectuons l'addition de cette valeur à 5014.

Reports →		+1			+1	
			5	0	1	4
	+		5	5	4	7
		1	2	5	6	3

Et on soustrait $\overline{10000}^{8}$ (qui vaut dans notre système décimal 8^4) de cette somme.

		1	2	5	6	3
	-	1	0	0	0	0
			2	5	6	3

Et on conclut :

$$\overline{5014}^{8} - \overline{2231}^{8} = \overline{2563}^{8}$$

Pratique de la multiplication

La multiplication en base 10 n'est pas compliquée. Pour cela, faisons appel à nos connaissances quelques peu … lointaines. En effet, en primaire, le produit de 2 nombres ou plus s'obtenait également grâce à un abaque, en se basant sur deux choses : d'une part, la décomposition du nombre en puissances de dix fournie par le système positionnel décimal, et d'autre part, sur la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

Voici les tables de multiplication pour les systèmes décimal, binaire et octal.

SYSTÈME BINAIRE

x	0	1
0	0	0
1	0	1

SYSTÈME OCTAL

x	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	10	12	14	16
3	0	3	6	11	14	17	22	25
4	0	4	10	14	20	24	30	34
5	0	5	12	17	24	31	36	43
6	0	6	14	22	30	36	44	52
7	0	7	16	25	34	43	52	61

Attention, ces nombres sont à lire en base 8 !

SYSTÈME DÉCIMAL

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81

De plus amples explications…

Lors d'une **multiplication écrite**, nous superposons les nombres à multiplier dans l'abaque.

Nous utilisons la distributivité dans la multiplication pour calculer ce produit.

Ensuite, nous commençons par multiplier le nombre de la première ligne par le premier chiffre de la seconde ligne. Nous recommençons ainsi avec tous les chiffres de la seconde ligne tout en écrivant les réponses de chaque produit obtenu l'une en dessous de l'autre ; tout en n'oubliant pas de décaler chaque réponse d'une colonne au fur et à mesure que nous les obtenons, cela, pour respecter le système de position.

Après cela, effectuons la somme des réponses dans un nouvel abaque.

Mais lorsque le produit des chiffres de même rang est supérieur à b, nous faisons un report du nombre de b-aines vers le chiffre directement à gauche dans la réponse (cf. le report dans l'addition en base b à la page 81).

SYSTÈME BINAIRE

		1	0	0	1
x				1	1
		1	0	0	1
+	1	0	0	1	
	1	1	0	1	1

SYSTÈME OCTAL

	1	4	2	3
x			1	2
	3	0	4	6
+	1	4	2	3
	1	7	2	7	6

SYSTÈME DÉCIMAL

	1	4	2	3
x			1	2
	2	8	4	6
+	1	4	2	3
	1	7	0	7	6

Au cours de l'histoire, ne disposant pas de machine à calculer, les mathématiciens ont rivalisé de génie pour trouver des méthodes permettant un calcul mental rapide et de plus en plus facile à pratiquer.

A l'école primaire, nos instituteurs se sont employés à nous apprendre ces techniques, qui reposent pour la plupart sur l'emploi de la base.

Nous allons ici vous rappeler plusieurs techniques que vous avez apprises dans votre enfance, mais nous les généraliserons à la **base *b*** et l'illustrerons dans des bases différentes.

La compensation

C'est une opération importante. En effet, la compensation permet de calculer assez rapidement des sommes, produits… en simplifiant le calcul sans en changer le résultat final.

LA COMPENSATION « CROISÉE »

Lorsque l'on se retrouve face à une addition plus compliquée à effectuer, nous utiliserons ce que l'on définit comme « la compensation croisée ». C'est-à-dire que, lorsqu'un des termes de la somme est difficile à additionner, nous allons lui ajouter une certaine valeur pour simplifier ce calcul.

Mais pour maintenir le résultat final, nous devons *compenser* en soustrayant cette valeur, ajoutée, au second terme. Ainsi, la somme de ces deux termes sera plus aisée…

Illustrations…

En base décimale[1]

$$299\,993 + 456\,728 = ?$$

$$=(299\,993 \mathbf{+ 7}) + (456\,728 \mathbf{- 7})$$

$$= 300\,000 + 456\,721 = 756\,721$$

En base octale

$$\overline{277777}^{8} + \overline{123\,521}^{8} = ?$$

$$= \left(\overline{277777}^{8} + \overline{1}^{8}\right) + \left(\overline{123\,521}^{8} - \overline{1}^{8}\right)$$

$$= \overline{300000}^{8} + \overline{123520}^{8} = \overline{423520}^{8}$$

[1] Pour faciliter la lecture, nous conservons la notation usuelle des nombres en base 10.

LA COMPENSATION « PARALLÈLE »

De même que dans l'addition, nous nous retrouvons souvent face à une différence difficile à effectuer de tête. Nous pouvons alors utiliser « la compensation parallèle ».

Par cela, lorsque nous devons calculer une différence, compenser peut simplifier le calcul sans altérer le résultat final.

Ainsi, pour faire une compensation parallèle, nous allons simplement ajouter une certaine valeur à un des termes. Mais, dans ce cas-là, dans la soustraction, il faut rajouter cette valeur à l'autre terme pour maintenir le résultat correct.

Illustrations…

En base décimale

456 730 - 299 993 = ?

=(456 730 **+ 7**) - (299 993 **+7**)

=456 737 - 300 000 =156 737

En base octale

$\overline{123\,521}^{8} - \overline{17777}^{8} = ?$

$= \left(\overline{123\,521}^{8} + \overline{1}^{8}\right) - \left(\overline{17777}^{8} + \overline{1}^{8}\right)$

$= \overline{123\,522}^{8} - \overline{20000}^{8} = \overline{103522}^{8}$

LA COMPENSATION DANS LA MULTIPLICATION

Pour simplifier un produit, on va multiplier ou diviser un de ses termes par une valeur précise… Dans ces cas-ci, il faudra alors respectivement diviser ou multiplier l'autre terme par cette valeur, pour conserver l'égalité.

Illustrations…

En base décimale

0.25 x 12 488= ?

= (0.25 **x 4**) x (12 488 **: 4**)

=1 x 3 122 = 3 122

En base octale

$\overline{0,20}^{8} \times \overline{1044}^{8} = ?$

$= \left(\overline{0,20}^{8} \times \overline{4}^{8}\right) \times \left(\overline{1044}^{8} : \overline{4}^{8}\right)$

$= \overline{1}^{8} \times \overline{211}^{8} = \overline{211}^{8}$

LA COMPENSATION DANS LA DIVISION

Comme expliqué plus tôt, la compensation dans la multiplication vise à faciliter le calcul. C'est aussi à cela que sert son homologue, la compensation dans la division.

Pour simplifier une division, nous allons également multiplier ou diviser un de ses facteurs par une valeur intéressante … Mais il faudra alors respectivement multiplier ou diviser l'autre facteur par cette valeur spécifique.

Illustrations…

En base décimale

$$250\,500 : 1500 = ?$$
$$= (250\,500 : 500) : (1500 : 500)$$
$$= 501 : 3 = 167$$

En base octale

$$\overline{66667400}^{8} : \overline{2400}^{8} = ?$$
$$= \left(\overline{66667400}^{8} : \overline{400}^{8}\right) : \left(\overline{2400}^{8} : \overline{400}^{8}\right)$$
$$= \overline{155557}^{8} : \overline{5}^{8} = \overline{25743}^{8}$$

L'utilisation d'opérateurs

Les opérateurs en base b peuvent aussi être très utiles en calcul mental car ils permettent, un peu comme la compensation de faciliter l'opération à effectuer.

a) En effet, si nous devons effectuer une addition *x + y* où le nombre *y* à ajouter est $b^k - 1$,… nous préfèrerons calculer $(x + b^k) - 1$.

De même, si on effectue une addition *x + y* où le nombre *y* à ajouter est $b^k + 1$,… nous calculerons alors $(x + b^k) + 1$.

b) Basé sur le même principe que dans l'addition, si nous devons effectuer une soustraction *x - y* où le nombre *y* à soustraire est $b^k - 1$,… nous préfèrerons calculer $(x - b^k) + 1$.

De même, si nous effectuons une addition *x - y* où le nombre *y* à soustraire est $b^k + 1$,… nous calculerons $(x - b^k) - 1$.

Illustrations…

En base décimale

$525 \pm 99 = ?$

$=(525 \pm \mathbf{100}) \mp \mathbf{1}$

$= 624$ (si $525 + 99$) ou

$=426$ (si $525 - 99$)

$525 \pm 101 = ?$

$(525 \pm \mathbf{100}) \pm \mathbf{1} = ?$

$= 626$ (si $525 + 101$) ou

$=424$ (si $525 - 101$)

En base octale…

$\overline{453}^{8} \pm \overline{77}^{8} = ?$

$= \left(\overline{453}^{8} \pm \overline{100}^{8} \right) \mp \overline{1}^{8}$

$= \overline{552}^{8}$ (si $\overline{453}^{8} + \overline{77}^{8}$)

$= \overline{354}^{8}$ (si $\overline{453}^{8} - \overline{77}^{8}$)

$\overline{453}^{8} \pm \overline{101}^{8} = ?$

$= \left(\overline{453}^{8} \pm \overline{100}^{8} \right) \pm \overline{1}^{8}$

$= \overline{554}^{8}$ (si $\overline{453}^{8} + \overline{101}^{8}$)

$= \overline{352}^{8}$ (si $\overline{453}^{8} - \overline{101}^{8}$)

c) En ce qui concerne la multiplication et la division, si un des facteurs est b^k ; il suffit alors de faire respectivement

glisser vers la gauche/droite le nombre de k cases dans l'abaque.

Illustrations…

En base décimale

525 x 100 = ?

			5	2	5
x			1	0	0
	5	2	5	0	0

525 :100 = ?

	5	2	5	,0	0	0
:	1	0	0	,0	0	0
			5	,2	5	0

En base octale

$\overline{525}^{8} \times \overline{100}^{8}$ = ?

			5	2	5
x			1	0	0
	5	2	5	0	0

$\overline{525}^{8} : \overline{100}^{8}$ = ?

	5	2	5	,0	0	0
:	1	0	0	,0	0	0
			5	,2	5	0

d) Un autre des opérateurs dans la multiplication est b^k -1 ; il suffit alors de faire respectivement glisser vers la gauche le nombre N de k cases dans l'abaque et de soustraire 1 fois le nombre initial.

Autrement dit, $N \times (b^k - 1) = N \times b^k - (N \times 1)$

Illustrations…

En base décimale

$526 \times 999 = ?$

$= 526 \times 1000 - (526 \times 1)$

$= 526\,000 - 526 = 525\,474$

En base octale

$\overline{526}^{8} \times \overline{777}^{8} = ?$

$= \left(\overline{526}^{8} \times \overline{1000}^{8}\right) - \overline{526}^{8}$

$= \overline{526000}^{8} - \overline{526}^{8} = \overline{525252}^{8}$

Suivant le même principe, lorsque nous devons effectuer :

$$N \times (0, (b^k - 1))$$

A ce moment-là, la formule générale devient :

$$N \times (0, (b^k - 1)) = N \times 1 - \left(N \times \frac{1}{b^k}\right)$$

Illustrations…

En base décimale

$526 \times 0{,}999 = ?$

$= 526 \times 1 - \left(526 \times \frac{1}{10^3}\right)$

$= 526 - 0{,}526 = 525{,}474$

En base octale

$\overline{526}^{8} \times \overline{0{,}777}^{8} = ?$

$= \left(\overline{526}^{8} \times \overline{1}^{8}\right) - \left(\overline{526}^{8} \times \frac{1}{\overline{10^3}^{8}}\right)$

$= \overline{526}^{8} - \overline{0{,}526}^{8} = \overline{525{,}252}^{8}$

Le principe général des opérateurs est de toujours essayer de se ramener à un énoncé où *b (la base)* est présente.

Tableau récapitulatif de quelques opérateurs fondamentaux

Opérateurs en base 10	Calculs à réaliser	Opérateurs en base 8
N x 9	N x 10 – (N x 1)	$N \times \overline{7}^{8}$
N x 90	N x 100 – (N x 10)	$N \times \overline{70}^{8}$
N x 99	N x 100 – (N x 1)	$N \times \overline{77}^{8}$
N x 900	N x 1000 – (N x 100)	$N \times \overline{700}^{8}$
N x 999	N x 1000 – (N x 1)	$N \times \overline{777}^{8}$
N x 0,9	$N \times 1 - (N \times \frac{1}{10})$	$N \times \overline{0,7}^{8}$
N x 9,9	$N \times 10 - (N \times \frac{1}{10})$	$N \times \overline{7,7}^{8}$
N x 0,99	$N \times 1 - (N \times \frac{1}{100})$	$N \times \overline{0,77}^{8}$

POUR ALLER PLUS LOIN… POSONS-NOUS ENCORE UNE PETITE QUESTION…

Que deviendrait un nombre N si on le multipliait/divisait par q ou q^k, q étant un diviseur de la base b ?

D'une part, pour multiplier un nombre quelconque N par q^k, il suffirait donc de transformer le calcul initial : $N \times q^k$ *en* un calcul incluant la base.

Autrement dit, $(N \times (b^k)) : r^k$ où $r = \frac{b}{q}$

Illustrations…

En base décimale

$16 \times 5^3 = (16 \times 10^3) : 2^3 = (16 \times 1000) : 8 = 2000$

En base octale

$$\overline{6}^{8} \times \overline{4^3}^{8} = \left(\overline{6}^{8} \times \overline{1000}^{8}\right) : \overline{2^3}^{8} = \left(\overline{6}^{8} \times \overline{1000}^{8}\right) : \overline{10}^{8}$$

$$= \overline{600}^{8}$$

D'autre part, pour diviser un nombre quelconque N par q^k ; il suffirait donc de transformer le calcul initial $(N : q^k)$ en un calcul incluant la base.

Autrement dit, $(N : (b^k)) \times r^k$ où $r = \frac{b}{q}$

Illustrations…

En base décimale

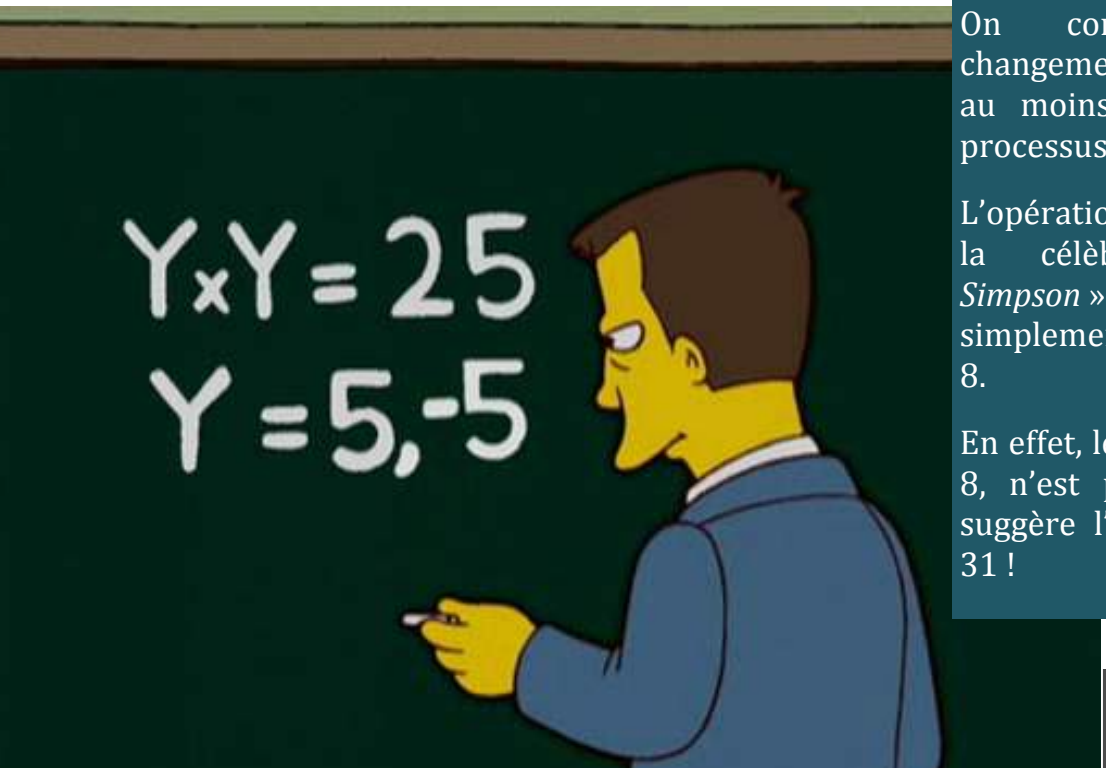
$120 : 5^2 = (120 : 10^2) \times 2^2 = 1{,}2 \times 4 = 4{,}8$

En base octale

$$\overline{120}^{8} : \overline{4^3}^{8} = \left(\overline{120}^{8} : \overline{1000}^{8}\right) \times \overline{2^3}^{8} = \left(\overline{0{,}120}^{8}\right) \times \overline{10}^{8}$$

$$= \overline{1,2}^{8}$$

Figure III. 2: *Une équation à l'école de Springfield. Cherchez l'erreur ….*



On constate que le changement de base modifie au moins en apparence le processus des opérations.

L'opération ci-contre, tirée de la célèbre série « *Les Simpson* » est tout simplement erronée en base 8.

En effet, le carré de 5 en base 8, n'est pas 25, comme le suggère l'image, mais plutôt 31 !

À l'école primaire, on apprend aux enfants que si la somme des chiffres d'un nombre est divisible par 3 alors ce nombre sera divisible par 3. La syntaxe du nombre, c'est-à-dire la façon dont il s'écrit, renseigne sur les propriétés de celui-ci. Mais comment arrive-t-on à un tel résultat ? Quel est le lien entre ces deux opérations - somme et division - qui, à première vue, n'ont aucun point commun ? Et surtout, quel effet peut avoir un changement de base dans la reconnaissance de ces propriétés ? Nous allons vous montrer, grâce aux propriétés de l'arithmétique modulaire, ce qu'il en est réellement.

Divisibilité par la base b

CRITÈRE DE DIVISIBILITÉ PAR 10 EN BASE 10

Un nombre N est divisible par 10, en base 10, lorsque le chiffre de rang nul de N est nul.

$$\forall N \in \mathbb{Z} : N = \overline{a_n \ldots a_0}^{10}$$

$$10 \mid N \Leftrightarrow a_0 = 0$$

En effet, $10 \mid \mathrm{N} \Leftrightarrow N \equiv 0 mod 10$ (1)

Or, $\mathrm{N} = \sum_{i=0}^{n} (a_i . 10^i)$

(1) $\Leftrightarrow$ $10 \mid \mathrm{N} \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} (a_i . 10^i) \equiv 0 mod 10$

En vertu de la compatibilité de la congruence avec l'addition, la multiplication et les puissances,

$$\sum_{i=0}^{n} (a_i . 10^i) \equiv \left[\sum_{i=0}^{n} ((a_{i.} . 10^i) mod 10) \right] mod 10 \equiv \left[\sum_{i=0}^{n} ((a_i \, mod 10).(10^i \, mod 10)) \right] mod 10$$

Nous savons que $\forall i \in N_0 : 10^i \equiv 0 mod 10$ car $10 \mid 10$.

Donc,

$$\sum_{i=0}^{n} (a_i . 10^i) \equiv \left[(a_0 \, mod 10).(10^0 \, mod 10) \right] mod 10 \equiv \left[(a_0 \, mod 10).1 \right] mod 10 \equiv a_0 \, mod 10$$

Et comme on travaille en base 10, $0 \leq a_0 < 10 \Rightarrow (a_0 \, mod 10 \equiv 0 mod 10 \Leftrightarrow a_0 = 0)$

Finalement, $\boxed{10 \mid \mathrm{N} \Leftrightarrow a_0 = 0}$

En base 10, 10 divise un nombre N **si et seulement si** le chiffre de rang nul est égal à 0.

CRITÈRE DE DIVISIBILITÉ PAR b EN BASE b

Un nombre N est divisible par b, en base b, lorsque le chiffre de rang nul de N est nul.

$$\forall N \in \mathbb{Z} : N = \overline{a_n \ldots a_0}^{\,b}$$

$$b \mid N \Leftrightarrow a_0 = 0$$

En effet, $\quad b \mid N \Leftrightarrow N \equiv 0 \bmod b \qquad (1)$

Or, $\quad N = \sum_{i=0}^{n} (a_i . b^i)$

$(1) \Leftrightarrow \quad b \mid N \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} (a_i . b^i) \equiv 0 \bmod b$

En vertu de la compatibilité de la congruence avec l'addition, la multiplication et les puissances,

$$\sum_{i=0}^{n} (a_i . b^i) \equiv \left[\sum_{i=0}^{n} ((a_{i.} . b^i) \bmod b) \right] \bmod b \equiv \left[\sum_{i=0}^{n} ((a_i \bmod b).(b^i \bmod b)) \right] \bmod b$$

Nous savons que $\quad \forall i \in N_0 : b^i \equiv 0 \bmod b$ car b | b.

Donc, $\sum_{i=0}^{n} (a_i . b^i) \equiv \left[(a_0 \bmod b).(b^0 \bmod b) \right] \bmod b \equiv \left[(a_0 \bmod b).1 \right] \bmod b \equiv a_0 \bmod b$

Et comme on travaille en base b, $\quad 0 \le a_0 < b \Rightarrow a_0 \bmod b \equiv 0 \bmod b \Leftrightarrow a_0 = 0$

Finalement, $\quad \boxed{b \mid N \Leftrightarrow a_0 = 0}$

En base b, b divise un nombre N **si et seulement si** le chiffre de rang nul est égal à 0.

Illustrations…

En base décimale

1250 est divisible par 10.

En base octale

$\overline{170}^{\,8}$ est divisible par $\overline{10}^{\,8} = \overline{8}^{\,10}$.

CRITÈRE DE DIVISIBILITÉ PAR b^k EN BASE b

Un nombre N est divisible par b^k ($k \in \mathbb{N}_0$) en base b, lorsque les k derniers chiffres formant le nombre N sont nuls.

$$\forall N \in \mathbb{Z} : N = \overline{a_n ... a_0}^{\,b}$$

$$b^k \mid N \Leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N} : i < k \Rightarrow a_i = 0$$

En effet, $b^k \mid N \Leftrightarrow N \equiv 0 \bmod b^k$ (1)

Or, $N = \sum_{i=0}^{n} (a_i . b^i)$

(1) $\Leftrightarrow$ $b^k \mid N \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} (a_i . b^i) \equiv 0 \bmod b^k$

$$\sum_{i=0}^{n} (a_i . b^i) \equiv \left[\sum_{i=0}^{n} ((a_{i.} . b^i) \bmod b^k) \right] \bmod b^k \equiv \left[\sum_{i=0}^{n} ((a_i \bmod b^k) . (b^i \bmod b^k)) \right] \bmod b^k$$

Nous savons que $\forall i \in N_0$ tel que $i \geq k : b^i \equiv 0 \bmod b^k$

Donc,

$$\sum_{i=0}^{n} (a_i . b^i) \equiv \left[\sum_{i=0}^{k-1} ((a_i . b^i) \bmod b^k) + \sum_{i=k}^{n} ((a_i . b^i) \bmod b^k) \right] \bmod b^k \equiv \left[\sum_{i=0}^{k-1} ((a_i . b^i) \bmod b^k) \right] \bmod b^k$$

Or, $\sum_{i=0}^{k-1} a_i . b^i < b^k$.

Donc, $\sum_{i=0}^{k-1} a_i . b^i \equiv 0 \bmod b^k \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{k-1} a_i . b^i = 0$

ou encore $a_i = 0 \quad \forall i \in \{0, ..., k-1\}$

Finalement $\boxed{b^k \mid N \Leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N} : i < k \Rightarrow a_i = 0}$

En base b, b^k divise un nombre N **si et seulement si** les chiffres de rangs strictement inférieurs à k sont égaux à 0.

Critères de divisibilité par un diviseur q de la base b

CRITÈRE DE DIVISIBILITÉ PAR 2 EN BASE 10

Un nombre N est divisible par 2, en base 10, lorsque le chiffre de rang nul de N est divisible par 2.

$$\forall N \in \mathbb{Z} : N = \overline{a_n \ldots a_0}^{10}$$

$$2 \mid N \Leftrightarrow 2 \mid a_0$$

En effet, $2 \mid \mathrm{N} \Leftrightarrow N \equiv 0 mod 2$ (1)

Or, $\mathrm{N} = \sum_{i=0}^{n} (a_i . 10^i)$

(1) $\Leftrightarrow$ $2 \mid \mathrm{N} \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} (a_i . 10^i) \equiv 0 mod 2$

En vertu de la compatibilité de la congruence avec l'addition, la multiplication et les puissances,

$$\sum_{i=0}^{n} (a_i . 10^i) \equiv \left[\sum_{i=0}^{n} ((a_{i.} . 10^i) mod 2) \right] mod 2 \equiv \left[\sum_{i=0}^{n} ((a_i \, mod 2).(10^i \, mod 2)) \right] mod 2$$

Nous savons que $\forall i \in N_0 : 10^i \equiv 0 mod 2$ car $2 \mid 10$.

Donc, $\sum_{i=0}^{n} (a_i . 10^i) \equiv \left[(a_0 \, mod 2).(10^0 \, mod 2) \right] mod 2 \equiv \left[(a_0 \, mod 2).1 \right] mod 2 \equiv a_0 \, mod 2$

Finalement, $\boxed{2 \mid \mathrm{N} \Leftrightarrow a_0 \equiv 0 mod 2}$

En base 10, 2 divise un nombre N **si et seulement si** le chiffre de rang nul de N est divisible par 2.

CRITÈRE DE DIVISIBILITÉ PAR 5 EN BASE 10

Tout comme 2, 5 est un diviseur de 10. De la même façon, nous obtenons le critère de divisibilité suivant

$$\boxed{5 \mid \mathrm{N} \Leftrightarrow a_0 \equiv 0 mod 5}$$

En base 10, 5 divise un nombre N **si et seulement si** le chiffre de rang nul de N est divisible par 5.

GÉNÉRALISATION EN BASE b

Un nombre N est divisible par q, en base b, si q divise b, lorsque le chiffre de rang nul de N est divisible par q.

$$\forall N \in \mathbb{Z} : N = \overline{a_n \ldots a_0}^{b}$$

$$q \mid N \Leftrightarrow q \mid a_0$$

En effet, $q \mid N \Leftrightarrow N \equiv 0 \bmod q$ (1)

Or, $N = \sum_{i=0}^{n} (a_i . b^i)$

(1) $\Leftrightarrow$ $q \mid N \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} (a_i . b^i) \equiv 0 \bmod q$

En vertu de la compatibilité de la congruence avec l'addition, la multiplication et les puissances,

$$\sum_{i=0}^{n} (a_i . b^i) \equiv \left[\sum_{i=0}^{n} ((a_{i.} . b^i) \bmod q) \right] \bmod q \equiv \left[\sum_{i=0}^{n} ((a_i \bmod q).(b^i \bmod q)) \right] \bmod q$$

Nous savons que $\forall i \in N_0 : b^i \equiv 0 \bmod q$ car $q \mid b$.

Donc,

$$\sum_{i=0}^{n} (a_i . b^i) \equiv \left[(a_0 \bmod q).(b^0 \bmod q) \right] \bmod q \equiv \left[(a_0 \bmod q).1 \right] \bmod q \equiv a_0 \bmod q$$

Finalement, $\boxed{q \mid N \Leftrightarrow a_0 \equiv 0 \bmod q}$

En base b, q, diviseur de b, divise un nombre N **si et seulement si** le chiffre de rang nul de N est divisible par q.

CRITÈRE DE DIVISIBILITÉ PAR 4 EN BASE 8

Un nombre N est divisible par 4, en base 8, lorsque le chiffre de rang nul est divisible par 4.

$$\forall N \in \mathbb{Z} : N = \overline{a_n \ldots a_0}^{8}$$

$$4 \mid N \Leftrightarrow 4 \mid \overline{a_0}^{8}$$

En effet, $4 \mid N \Leftrightarrow N \equiv 0 \bmod 4$ (1)

Or, $N = \sum_{i=0}^{n}(a_i.8^i)$

(1) $\Leftrightarrow$ $4 \mid N \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n}(a_i.8^i) \equiv 0 mod 4$

De ce fait,

$$\sum_{i=0}^{n}(a_i.8^i) \equiv \left[\sum_{i=0}^{n}((a_{i.}.8^i) mod 4)\right] mod 4 \equiv \left[\sum_{i=0}^{n}((a_i mod 4).(8^i mod 4))\right] mod 4$$

Nous savons que $\forall i \in N_0 : 8^i \equiv 0 mod 4$ car $4 \mid 8$.

Donc, $\sum_{i=0}^{n}(a_i.8^i) \equiv \left[(a_0 mod 4).(8^0 mod 4)\right] mod 4 \equiv \left[(a_0 mod 4).1\right] mod 4 \equiv a_0 mod 4$

Finalement, $\boxed{4 \mid N \Leftrightarrow a_0 \equiv 0 mod 4}$

En base 8, 4 divise un nombre N **si et seulement si** le chiffre de rang nul de N est divisible par 4.

CRITÈRE DE DIVISIBILITÉ PAR 2 EN BASE 8

2 est un autre diviseur de 8. De la même façon, nous obtenons le critère de divisibilité suivant

$\boxed{2 \mid N \Leftrightarrow a_0 \equiv 0 mod 2}$

En base 8, 2 divise un nombre N **si et seulement si** le chiffre de rang nul de N est divisible par 2.

Illustrations…

En base décimale

725 est divisible par 5.

823 ne l'est pas.

En base octale

$\overline{154}^{8}$ est divisible par 4.

$\overline{16}^{8}$ ne l'est pas.

Critères de divisibilité par une p^{ème} puissance d'un diviseur q de la base b

CRITÈRE DE DIVISIBILITÉ PAR 4 EN BASE 10

Un nombre N est divisible par 4, en base 10, lorsque le nombre formé par les deux derniers rangs de N est divisible par 4.

$$\forall N \in \mathbb{Z} : N = \overline{a_n ... a_0}^{10}$$

$$4 \mid N \Leftrightarrow 4 \mid \overline{a_1 a_0}^{10}$$

En effet, $4 \mid \mathrm{N} \Leftrightarrow N \equiv 0 mod 4$ (1)

Or, $\mathrm{N} = \sum_{i=0}^{n} (a_i . 10^i)$

(1) $\Leftrightarrow$ $4 \mid \mathrm{N} \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} (a_i . 10^i) \equiv 0 mod 4$

Par conséquent,

$$\sum_{i=0}^{n} (a_i . 10^i) \equiv \left[\sum_{i=0}^{n} ((a_{i.} . 10^i) mod 4) \right] mod 4 \equiv \left[\sum_{i=0}^{n} ((a_i \, mod 4).(10^i \, mod 4)) \right] mod 4$$

Nous savons que $\forall i \in N_0$ tel que $i \geq 2 : 10^i \equiv 0 \bmod 4$

car si $2 \mid 10$ alors $2^2 \mid 10^2$

$$\sum_{i=0}^{n} (a_i . 10^i) \equiv \left[\sum_{i=0}^{1} ((a_{i.} . 10^i) \bmod 4) + \sum_{i=2}^{n} ((a_{i.} . 10^i) \bmod 4) \right] \bmod 4 \equiv \left[\sum_{i=0}^{1} ((a_i . 10^i) \bmod 4) + 0 \right] \bmod 4$$

Finalement, $\boxed{4 \mid \mathrm{N} \Leftrightarrow 4 \mid \overline{a_1 a_0}}$

En base 10, 4 divise un nombre N **si et seulement si** le nombre formé par les chiffres des deux derniers rangs de N est divisible par 4.

CRITÈRE DE DIVISIBILITÉ PAR 8 EN BASE 10

Si $4=2^2$ en base 10, nous savons que $8=2^3$ en base 10. Nous déduisons un critère de divisibilité par 8 de façon semblable à ce que nous avons fait pour 4.

$$\forall N \in \mathbb{Z} : N = \overline{a_n \ldots a_0}^{10}$$

$$8 \mid N \Leftrightarrow 8 \mid \overline{a_2 a_1 a_0}^{10}$$

En base 10, 8 divise un nombre N **si et seulement si** le nombre formé par les chiffres des trois derniers rangs de N est divisible par 8.

GÉNÉRALISATION EN BASE b AVEC LES PUISSANCES DES DIVISEURS DE LA BASE

$\forall$ p $\in \mathbb{N}_0$, q étant un diviseur de la base b, un nombre N est divisible par q^p lorsque le nombre formé par les « p» derniers rangs de N est divisible par q^p.

$$\forall N \in Z ; N = \overline{a_n \ldots a_0}^{b}$$

$$q^p \mid N \Leftrightarrow q^p \mid \overline{a_{p-1} \ldots a_0}^{b}$$

En effet, $q^p \mid \mathrm{N} \Leftrightarrow N \equiv 0 \bmod q^p$ (1)

Or, $\mathrm{N} = \sum_{i=0}^{n} (a_i . b^i)$

(1) $\Leftrightarrow$ $q^p \mid \mathrm{N} \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} (a_i . b^i) \equiv 0 \bmod q^p$

Or,

$$\sum_{i=0}^{n} (a_i . b^i) \equiv \left[\sum_{i=0}^{n} ((a_{i.} . b^i) \bmod q^p) \right] \bmod q^p \equiv \left[\sum_{i=0}^{n} ((a_i \bmod q^p) . (b^i \bmod q^p)) \right] \bmod q^p$$

Nous savons que $\forall i \in N_0$ tel que $i \geq p : b^i \equiv 0 \bmod q^p$

car si $q \mid b$ alors $q^p \mid b^p$

$$\sum_{i=0}^{n}(a_i.b^i) \equiv \left[\sum_{i=0}^{p-1}((a_i.b^i) \bmod q^p) + \sum_{i=p}^{n}((a_i.b^i) \bmod q^p)\right] \bmod q^p \equiv \left[\sum_{i=0}^{p-1}((a_i.b^i) \bmod q^p)\right] \bmod q^p$$

Finalement,

$$q^p \mid N \Leftrightarrow q^p \mid \overline{a_{p-1}...a_0}^{\,b}$$

En base b, si q divise b, q^p divise un nombre N **si et seulement si** le nombre formé par les chiffres des p derniers rangs de N est divisible par q^p.

Illustrations…

En base décimale

725 est divisible par 25.

En base octale

$\overline{25140}^{\,8}$ est divisible par $\overline{4^2}^{\,8} = \overline{20}^{\,8}$.

AVANTAGES D'UN SYSTÈME DUODÉCIMAL.

Nous voyons donc avec cette démonstration sur les critères de divisibilité des diviseurs de la base et de ceux de leurs puissances, tout l'intérêt que nous aurions à avoir une base contenant un grand nombre de diviseurs. C'est pourquoi il existe quelques mathématiciens qui aimeraient voir le système duodécimal remplacer le système décimal. Deux associations en particulier en font la propagande, la *Dozenal Society of America* ainsi que la *Dozenal Society of Great-Britain*.

Ces mathématiciens arguent le fait que le système des fractions en serait simplifié ainsi que le calcul mental.

D'ailleurs, le système duodécimal est encore la référence lorsqu'il s'agit de parler du temps (12 mois, 24 heures, …) et certains pays n'ont abandonné ce système numéral en faveur du système décimal il n'y a pas si longtemps. Ainsi, la Grande Bretagne a utilisé les douzaines dans son système financier jusqu'en 1971.

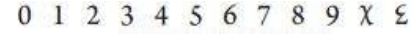


Figure III.3 : *Chiffres du système duodécimal, selon l'écriture proposée par William Addison Dwiggins en 1932.*

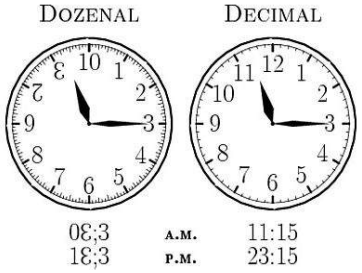


Figure III.4 : *Dans un système duodécimal, apprendre la lecture de l'heure serait plus facile ! Au lieu de dire 1h05 min, on pourrait simplement dire 1,1h.*

Un autre système ayant fait ses preuves est le système sexagésimal. En effet, la base soixante, avec ses nombreux diviseurs (1,2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 et 60), fut utilisée par les Babyloniens.

Par ailleurs, le système de mesure d'angles en minutes et secondes ainsi que celui des coordonnées géographiques sont des vestiges de la base sexagésimale.

La base décimale, même avec ses atouts immenses que sont les dix doigts, n'est donc, peut-être pas, le système de l'avenir.

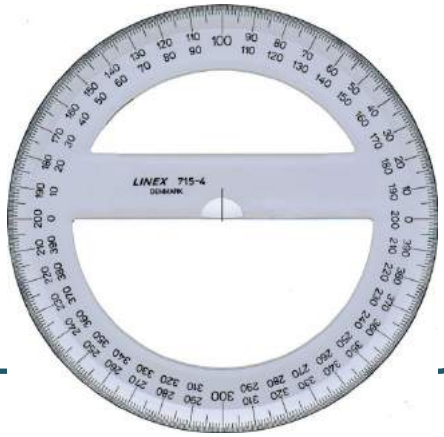


Figure III.5 : *L'angle au centre du cercle mesure 360°.*

Critères de divisibilité par k=b-1 en base b

CRITÈRE DE DIVISIBILITÉ PAR 9 EN BASE 10

Un nombre N est divisible par 9, en base 10, lorsque le nombre formé de la somme des chiffres de N est divisible par 9.

$$\forall N \in \mathbb{Z} : N = \overline{a_n \ldots a_0}^{10}$$

$$9 \mid N \Leftrightarrow 9 \mid \sum_{i=0}^{n} a_i$$

En effet, $9 \mid N \Leftrightarrow N \equiv 0 \bmod 9$ (1)

Or, $N = \sum_{i=0}^{n} (a_i . 10^i)$

(1) $\Leftrightarrow$ $9 \mid N \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} (a_i . 10^i) \equiv 0 \bmod 9$

$$\sum_{i=0}^{n} (a_i . 10^i) \equiv \left[\sum_{i=0}^{n} ((a_{i.} . 10^i) \bmod 9) \right] \bmod 9 \equiv \left[\sum_{i=0}^{n} ((a_i \bmod 9).(10^i \bmod 9)) \right] \bmod 9$$

Nous savons que $\forall i \in N : 10^i \equiv 1 \bmod 9$

Car $10 \bmod 9 \equiv (9+1) \bmod 9 \equiv 1 \bmod 9$

Donc,

$$\sum_{i=0}^{n}(a_i.10^i)\equiv\left[\sum_{i=0}^{n}(a_i \bmod 9).(10^i \bmod 9)\right]\bmod 9\equiv\left[\sum_{i=0}^{n}(a_i \bmod 9).1\right]\bmod 9\equiv\left(\sum_{i=0}^{n}a_i\right)\bmod 9$$

Finalement,

$$\boxed{9\,|\,N \Leftrightarrow 9\,|\sum_{i=0}^{n}a_i}$$

En base 10, 9 divise un nombre N **si et seulement si**
le nombre formé par la somme des chiffres de N est divisible par 9.

À partir de cette démonstration, on peut déduire le critère de divisibilité par 3.

CRITÈRE DE DIVISIBILITÉ PAR 3 EN BASE 10

Un nombre N est divisible par 3, en base 10, lorsque le nombre formé de la somme des chiffres de N est divisible par 3.

$$\forall N\in\mathbb{Z}: N=\overline{a_n...a_0}^{10}$$

$$3\,|\,N \Leftrightarrow 3\,|\sum_{i=0}^{n}a_i$$

En effet, $3\,|\,\mathrm{N} \Leftrightarrow N\equiv 0 mod 3$ (1)

Or, $\mathrm{N} = \sum_{i=0}^{n}(a_i.10^i)$

(1) $\Leftrightarrow$ $3\,|\,\mathrm{N} \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n}(a_i.10^i)\equiv 0 mod 3$

$$\sum_{i=0}^{n}(a_i.10^i)\equiv\left[\sum_{i=0}^{n}((a_{i.}.10^i)\bmod 3)\right]\bmod 3\equiv\left[\sum_{i=0}^{n}((a_i \bmod 3).(10^i \bmod 3))\right]\bmod 3$$

Nous savons que $\forall i\in N: 10^i\equiv 1 mod 3$ car $10 mod 3\equiv(9+1) mod 3\equiv 1 mod 3$.

Donc,

$$\sum_{i=0}^{n}(a_i.10^i)\equiv\left[\sum_{i=0}^{n}(a_i \bmod 3).(10^i \bmod 3)\right]\bmod 3\equiv\left[\sum_{i=0}^{n}(a_i \bmod 3).1\right]\bmod 3\equiv\left(\sum_{i=0}^{n}a_i\right)\bmod 3$$

Finalement,

$$\boxed{3\,|\,N \Leftrightarrow 3\,|\sum_{i=0}^{n}a_i}$$

En base 10, 3 divise un nombre N **si et seulement si**
le nombre formé par la somme des chiffres de N est divisible par 3.

CRITÈRE DE DIVISIBILITÉ PAR k=b-1 EN BASE b

Un nombre N, en base b, est divisible par k=b-1 lorsque le nombre formé de la somme des chiffres de N est divisible par k.

$$\forall N \in \mathbb{Z} : N = \overline{a_n \ldots a_0}^{b}$$

$$k \mid N \Leftrightarrow k \mid \sum_{i=0}^{n} a_i$$

En effet, $k \mid N \Leftrightarrow N \equiv 0 \bmod k$ (1)

Or, $N = \sum_{i=0}^{n} (a_i . b^i)$

(1) $\Leftrightarrow$ $k \mid N \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} (a_i . b^i) \equiv 0 \bmod k$

Nous avons aussi que

$$\sum_{i=0}^{n} (a_i . 10^i) \equiv \left[\sum_{i=0}^{n} ((a_{i.} . b^i) \bmod k) \right] \bmod k \equiv \left[\sum_{i=0}^{n} ((a_i \bmod k).(b^i \bmod k)) \right] \bmod k$$

Nous savons que $\forall i \in N : b^i \equiv 1 \bmod k$

Car $b \bmod k \equiv (k+1) \bmod k \equiv 1 \bmod k$

Donc,

$$\sum_{i=0}^{n} (a_i . b^i) \equiv \left[\sum_{i=0}^{n} (a_i \bmod k).(b^i \bmod k) \right] \bmod k \equiv \left[\sum_{i=0}^{n} (a_i \bmod k).1 \right] \bmod k \equiv \left(\sum_{i=0}^{n} a_i \right) \bmod k$$

Finalement, $k \mid N \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} a_i \equiv 0 \bmod k$

En base b, k=b-1 divise un nombre N **si et seulement si** le nombre formé par la somme des chiffres de N est divisible par k.

Illustrations…

En base décimale

19 332 est divisible par 9 car (1+9+3+3+2)=18 est multiple de 9.

En base octale

$\overline{65154}^{8}$ est divisible par $\overline{7}^{8}$ car $\overline{6+5+1+5+4}^{8} = \overline{21}^{10}$ est multiple de 7.

Critères de divisibilité par k=b+1 en base b

CRITÈRE DE DIVISIBILITÉ PAR 11 EN BASE 10

Un nombre N, en base 10, est divisible par 11 lorsque le nombre formé par la différence de la somme des chiffres de rang pair et de la somme des chiffres de rang impair est divisible par 11.

$$\forall N \in \mathbb{Z} : N = \overline{a_n \ldots a_0}^{10}$$

$$11 \left| N \Leftrightarrow 11 \right| \left(\sum_{i \in P} a_i - \sum_{i \in I} a_i \right)$$

Où $I = \{ i \in \mathbb{N} \mid 0 \le i \le n \text{ et } i \text{ est impair} \}$

$P = \{ i \in \mathbb{N} \mid 0 \le i \le n \text{ et } i \text{ est pair} \}$

En effet, $11 \mid \mathrm{N} \Leftrightarrow N \equiv 0 \bmod 11$ (1)

Or, $\mathrm{N} = \sum_{i=0}^{n} (a_i . 10^i)$

(1) $\Leftrightarrow$ $11 \mid \mathrm{N} \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} (a_i . 10^i) \equiv 0 \bmod 11$

Nous savons que :

$$\sum_{i=0}^{n} (a_i . 10^i) \equiv \left[\sum_{i=0}^{n} ((a_{i.} . 10^i) \bmod 11) \right] \bmod 11 \equiv \left[\sum_{i=0}^{n} ((a_i \bmod 11).(10^i \bmod 11)) \right] \bmod 11$$

Soit $I = \{ i \in \mathbb{N} \mid 0 \le i \le n \text{ et } i \text{ est impair} \}$

$P = \{ i \in \mathbb{N} \mid 0 \le i \le n \text{ et } i \text{ est pair} \}$

$$\sum_{i=0}^{n} \left(a_i . 10^i \right) = \left(\sum_{i \in P} a_i . 10^i + \sum_{i \in I} a_i . 10^i \right)$$

Nous savons que $\forall i \in \mathbb{N}_0 : 10^i \equiv (-1)^i \bmod 11$ car $10 \equiv -1 \bmod 11$

Donc, $$\sum_{i=0}^{n} \left(a_i . 10^i \right) \equiv \left[\left(\left(\sum_{i \in P} a_i \right) \bmod 11 - \left(\sum_{i \in I} a_i \right) \bmod 11 \right) \right] \bmod 11$$

Finalement, $$\boxed{11 \left| N \Leftrightarrow \left(\sum_{i \in P} a_i - \sum_{i \in I} a_i \right) \equiv 0 \, mod \, 11 \right.}$$

En base 10, 11 divise un nombre N **si et seulement si** la différence de la somme des chiffres de rang pair et de celle des chiffres de rang impair est divisible par 11.

CRITÈRE DE DIVISIBILITÉ PAR k=b+1 EN BASE b

Un nombre N, en base b, est divisible par k=b+1 lorsque le nombre formé par la différence de la somme des chiffres de rang pair et de la somme des chiffres de rang impair est divisible par k.

$$\forall N \in \mathbb{Z} : N = \overline{a_n \ldots a_0}^{b}$$

$$k \mid N \Leftrightarrow k \mid \left(\sum_{i \in P} a_i - \sum_{i \in I} a_i \right)$$

Où $I = \{ i \in \mathbb{N} \mid 0 \le i \le n \text{ et } i \text{ est impair} \}$

$P = \{ i \in \mathbb{N} \mid 0 \le i \le n \text{ et } i \text{ est pair} \}$

En effet, $\mathrm{k} \mid \mathrm{N} \Leftrightarrow N \equiv 0 \bmod k$ (1)

Or, $\mathrm{N} = \sum_{i=0}^{n} (a_i . b^i)$

(1) $\Leftrightarrow$ $\mathrm{k} \mid \mathrm{N} \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} (a_i . b^i) \equiv 0 \bmod k$

De plus

$$\sum_{i=0}^{n} (a_i . b^i) \equiv \left[\sum_{i=0}^{n} ((a_{i.} . b^i) \bmod k) \right] \bmod k \equiv \left[\sum_{i=0}^{n} ((a_i \bmod k).(b^i \bmod k)) \right] \bmod k$$

Soit $I = \{ i \in \mathbb{N} \mid 0 \le i \le n \text{ et } i \text{ est impair} \}$

$P = \{ i \in \mathbb{N} \mid 0 \le i \le n \text{ et } i \text{ est pair} \}$

$$\sum_{i=0}^{n} \left(a_i . b^i \right) = \left(\sum_{i \in P} a_i . b^i + \sum_{i \in I} a_i . b^i \right)$$

Nous savons que $\forall i \in N_0 : b^i \equiv (-1)^i \bmod k$ car $b \equiv -1 \bmod k$

Donc, $$\sum_{i=0}^{n} \left(a_i . b^i \right) \equiv \left[\left(\sum_{i \in P} a_i \right) \bmod k - \left(\sum_{i \in I} a_i \right) \bmod k \right] \bmod k$$

Finalement, $$\boxed{k \mid N \Leftrightarrow \left(\sum_{i \in P} a_i - \sum_{i \in I} a_i \right) \equiv 0 \bmod k}$$

En base b, k= b+1, divise un nombre N **si et seulement si** la différence de la somme des chiffres de rang pair et de celle des chiffres de rang impair est divisible par k.

Illustration…

Etudions ce critère de divisibilité à la façon « Simpson », c'est-à-dire en base 8. Le diviseur de la base 8 à considérer est $\overline{11}^8$ (dans notre base décimale, ce nombre correspond à 9). Nous avons donc le critère suivant :

Un nombre entier N est divisible par $\overline{11}^8$ **si et seulement si** la différence de la somme des chiffres de rang pair et celle des chiffres de rang impair est divisible par $\overline{11}^8$.

Soit N = $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}^8$, alors $\left(\overline{11}^8 \middle| N \Leftrightarrow \overline{11}^8 \middle| \left(\sum_{i \in P} \overline{a_i}^8 - \sum_{i \in I} \overline{a_i}^8 \right) \right)$.

Par exemple, $\overline{5220535411606321}^8$ est divisible par $\overline{11}^8$ car…

$$\sum_{i \in P} \overline{a_i}^8 = \overline{5+2+5+5+1+6+6+2}^8 = \overline{40}^8$$

$$\sum_{i \in I} \overline{a_i}^8 = \overline{2+0+3+4+1+0+3+1}^8 = \overline{16}^8$$

Et $\overline{40}^8 - \overline{16}^8 = \overline{22}^8$. Or, $\overline{11}^8 \mid \overline{22}^8$

Critères de divisibilité par un k quelconque

CRITÈRE DE DIVISIBILITÉ PAR 7 EN BASE 10

Un nombre N, en base 10, est divisible par 7 si la différence du nombre formé par tous ses chiffres excepté celui des unités et le double du chiffre des unités est divisible par 7.

$$\forall N \in \mathbb{Z} : N = \overline{a_n \ldots a_0}^{10}$$

$$7 \mid N \Leftrightarrow 7 \mid \left(\overline{a_n \ldots a_1}^{10} - 2a_0 \right)$$

En effet, $7 \mid N \Leftrightarrow N \equiv 0 mod 7$

Or, $N = \sum_{i=0}^{n} \left(a_i . 10^i \right)$

Comme 21 est multiple de 7, $7 \mid N \Leftrightarrow 7 \mid \left(N - 21.a_0 \right)$

Nous avons $N - 21.a_0 = \sum_{i=2}^{n} a_i . 10^i + \left(a_1 - 2a_0 \right).10$

Ou encore $N - 21.a_0 = 10.\left(\overline{a_n \ldots a_1}^{10} - 2a_0 \right)$

Comme 7 et 10 sont premiers entre eux, $7 \mid \left(N - 21.a_0 \right) \Leftrightarrow 7 \mid \left(\overline{a_n \ldots a_1}^{10} - 2a_0 \right)$

Finalement, $\boxed{7 \mid N \Leftrightarrow 7 \mid \left(\overline{a_n \ldots a_1}^{10} - 2a_0 \right)}$

En base 10, 7 divise un nombre N **si et seulement si** la différence du nombre formé par tous ses chiffres excepté celui des unités et le double du chiffre des unités est divisible par 7.

CRITÈRE DE DIVISIBILITÉ PAR k PREMIER AVEC b EN BASE b

Soit k, nombre premier avec b, la base de numération.

Soit r, un multiple de k inférieur à b^2 dont le chiffre de rang nul est égal à 1.

Un nombre N, en base b, est divisible par k si la différence du nombre N à qui on a enlevé le rang nul et du produit du chiffre de rang 1 de r par le chiffre de rang nul de N est divisible par k.

Ayant trouvé un multiple de k, que l'on nommera r, tel que $r = \overline{m1}^b$.

Alors,

$$\forall N \in \mathbb{Z} : N = \overline{a_n \ldots a_0}^b$$

$$k \mid N \Leftrightarrow k \mid \left(\overline{a_n \ldots a_1}^b - m a_0 \right)$$

En effet, $k \mid N \Leftrightarrow N \equiv 0 \bmod k$

Or, $N = \sum_{i=0}^{n} (a_i . b^i)$

Comme r est multiple de k, $k \mid N \Leftrightarrow k \mid (N - r.a_0)$

Nous avons $N - r.a_0 = \sum_{i=2}^{n} a_i . b^i + (a_1 - m a_0).b$

Ou encore $N - r.a_0 = b.\left(\overline{a_n \ldots a_1}^b - m a_0 \right)$

Comme *b* et *k* sont premiers entre eux, $k \mid (N - r.a_0) \Leftrightarrow k \mid \left(\overline{a_n \ldots a_1}^b - m a_0 \right)$

Finalement,

$$k \mid N \Leftrightarrow k \mid \left(\overline{a_n \ldots a_1}^b - m a_0 \right)$$

Illustrations…

En base décimale

1638 est divisible par 7 car (163-2.8)=147,
divisible par 7 car (14-2.7)=0 est multiple de 7.

En base octale

Remarquant que $\overline{11}^{8}$ est multiple de $\overline{3}^{8}$, on peut affirmer que $\overline{652}^{8}$ est divisible par $\overline{3}^{8}$ car $\left(\overline{65}^{8}-\overline{2}^{8}\right)=\overline{63}^{8}$ est multiple de $\overline{3}^{8}$.

Généralisation des critères

TABLEAU DES CRITÈRES DE DIVISIBILITÉ EN BASE 10

Considérons $N=\sum_{i=0}^{n}\left(a_i.10^i\right)=\overline{a_n a_{n-1}...a_1 a_0}^{10}$

Et $I=\{i\in\mathbb{N}\,|\,0\le i\le n \text{ et } i \text{ est impair}\}$

$P=\{i\in\mathbb{N}\,|\,0\le i\le n \text{ et } i \text{ est pair}\}$

Diviseur	Critère	Traduction en Français
2	$2\,|\,N\Leftrightarrow 2\,|\,\overline{a_0}^{10}$	*Un nombre N est divisible par 2 si et seulement si le chiffre des unités est divisible par 2.*
3	$3\,|\,N\Leftrightarrow 3\,|\,\sum_{i=0}^{n}\overline{a_i}^{10}$	*Un nombre N est divisible par 3 si et seulement si la somme des chiffres le composant est divisible par 3.*
4	$4\,|\,N\Leftrightarrow 4\,|\,\overline{a_1 a_0}^{10}$	*Un nombre N est divisible par 4 si et seulement si le nombre formé du chiffre des unités et du chiffre des dizaines est divisible par 4.*
5	$5\,|\,N\Leftrightarrow 5\,|\,\overline{a_0}^{10}$	*Un nombre N est divisible par 5 si et seulement si le chiffre des unités est divisible par 5.*
6	$6\,|\,N\Leftrightarrow\left(2\,|\,\overline{a_0}^{10}\right)\wedge\left(3\,|\,\sum_{i=0}^{n}\overline{a_i}^{10}\right)$	*Un nombre N est divisible par 6 si et seulement s'il est divisible par 2 et par 3.*
7	$7\,|\,N\Leftrightarrow 7\,|\,\left(\overline{a_n a_{n-1}...a_1}^{10}-2.\overline{a_0}^{10}\right)$	*Un nombre N est divisible par 7 si et seulement si la différence du nombre formé par tous ses chiffres excepté celui des unités et le double du chiffre des unités est divisible par 7.*
8	$8\,|\,N\Leftrightarrow 8\,|\,\overline{a_2 a_1 a_0}^{10}$	*Un nombre N est divisible par 8 si et seulement si le nombre formé par ses trois derniers chiffres est divisible par 8.*
9	$9\,|\,N\Leftrightarrow 9\,|\,\sum_{i=0}^{n}\overline{a_i}^{10}$	*Un nombre N est divisible par 9 si et seulement si la somme des chiffres le composant est divisible par 9.*
10	$10\,|\,N\Leftrightarrow a_0=0$	*Un nombre N est divisible par 10 si et seulement s'il se termine par 0.*

11	$11 \mid N \Leftrightarrow 11 \mid \left(\sum_{i \in P} \overline{a_i}^{10} - \sum_{i \in I} \overline{a_i}^{10} \right)$	*Un nombre N est divisible par 11 si et seulement si la différence de la somme des chiffres de rang pair et celle des chiffres de rang impair est divisible par 11.*

MÉTHODE POUR RETROUVER LE CRITÈRE DE DIVISIBILITÉ D'UN NOMBRE k EN BASE b

- Commencer par calculer $b \bmod k$

Si $b \bmod k = 0$	alors utiliser le critère de « 5 » en base 10.
Si $b \bmod k = 1$	alors utiliser le critère de « 9 » en base 10.
Si $b \bmod k = -1$	alors utiliser le critère de « 11 » en base 10.

- Regarder si $k = q^p$ où q est un diviseur de b ($q \mid b$) et alors utiliser le critère de « 4 » ou de « 8 » en base 10.
- Si ces critères ne fonctionnent pas, décomposer k en facteurs premiers et se ramener à un critère semblable à celui de 6.
- Ou encore trouver un multiple r de k finissant par 1 pour réduire le nombre à diviser d'un rang de la façon suivante :

$$k \mid N\left(\overline{a_n \ldots a_1 a_0}^{\,b}\right) \Leftrightarrow k \left| \left(\overline{a_n \ldots a_1}^{\,b} - m.a_0\right)\right.$$

Illustrations en base octale…

Diviseur	Critère	Exemple
$\overline{2}^8$	$\overline{2}^8 \mid N \Leftrightarrow \overline{2}^8 \mid \overline{a_0}^8$	$\overline{2}^8 \mid \overline{476}^8$
$\overline{3}^8$	$\overline{3}^8 \mid N \Leftrightarrow \overline{3}^8 \mid \left(\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1}^{\,b} - \overline{a_0}^{\,b}\right)$	$\overline{3}^8 \mid \overline{476}^8$ car $\overline{3}^8 \mid \overline{41}^8$, car $\overline{3}^8 \mid \overline{3}^8$
$\overline{4}^8$	$\overline{4}^8 \mid N \Leftrightarrow \overline{4}^8 \mid \overline{a_0}^8$	$\overline{4}^8 \mid \overline{7350}^8$
$\overline{5}^8$	$\overline{5}^8 \mid N \Leftrightarrow \overline{5}^8 \mid \left(\overline{a_n \ldots a_1}^{\,b} - \overline{3}^8 . \overline{a_0}^{\,b}\right)$	$\overline{5}^8 \mid \overline{1313}^8$ car $\overline{5}^8 \mid \overline{120}^8$, car $\overline{5}^8 \mid \overline{12}^8$ $(= \overline{10}^{10})$
$\overline{6}^8$	$\overline{6}^8 \mid N \Leftrightarrow \left(\overline{2}^8 \mid N\right) \wedge \left(\overline{3}^8 \mid N\right)$	$\overline{6}^8 \mid \overline{476}^8$
$\overline{7}^8$	$\overline{7}^8 \mid N \Leftrightarrow \overline{7}^8 \mid \sum_{i=0}^{n} \overline{a_i}^8$	$\overline{7}^8 \mid \overline{313}^8$ car $\overline{7}^8 \mid \left(\overline{3}^8 + \overline{1}^8 + \overline{3}^8\right)$
$\overline{10}^8$	$\overline{10}^8 \mid N \Leftrightarrow \overline{a_0}^8 = 0$	$\overline{10}^8 \mid \overline{270}^8$
$\overline{11}^8$	$\overline{11}^8 \left| N \Leftrightarrow \overline{11}^8 \right| \left(\sum_{i \in P} \overline{a_i}^8 - \sum_{i \in I} \overline{a_i}^8 \right)$	$\overline{11}^8 \mid \overline{6303}^8$ car $\overline{11}^8 \mid \left(\overline{6}^8 - \overline{6}^8\right)$

Observation intéressante

Les critères de divisibilité que nous vous avons présentés dans les pages précédentes ne sont pas les seuls existants. Il existe plus d'une façon de reconnaître dans la syntaxe du nombre les caractères de divisibilité de celui-ci.

Ainsi, en manipulant les critères de divisibilité et en jouant avec les congruences, nous avons découvert un fait intéressant.

Lorsqu'on calcule le résidu modulo 4 d'un naturel N, tel que $N=\sum_{i=0}^{n}(a_i 10^i)$, on obtient ceci :

$$\sum_{i=0}^{n}(a_i.10^i)\equiv\left[\left(a_0 \bmod 4+(a_1 10^1)\bmod 4\right)\right]\bmod 4\equiv\left(a_0+2a_1\right)\bmod 4$$

Ce résultat nous permet d'énoncer un nouveau critère de divisibilité par 4 en base 10 qui serait :

> En base 10, 4 divise un nombre N **si et seulement si** la somme du chiffre des unités et du double du chiffre des dizaines est divisible par 4.

Un résultat semblable peut être obtenu pour le critère de divisibilité par 8 en base 10.

$$\sum_{i=0}^{n}(a_i.10^i)\equiv\left[\left(a_0 \bmod 8+(a_1 10^1)\bmod 8+(a_2 10^2)\bmod 8\right)\right]\bmod 8\equiv\left(a_0+2a_1+4a_2\right)\bmod 8$$

> En base 10, 8 divise un nombre N **si et seulement si** la somme du chiffre des unités, du double du chiffre des dizaines et du quadruple des chiffres des centaines est divisible par 8.

Grâce à ces résultats, il nous est possible de conjecturer un critère de divisibilité pour la k^{ème} puissance de 2 qui sera :

N est divisible par 2^k

$$\Updownarrow$$

$$N \bmod 2^k=0\Leftrightarrow\left[\sum_{i=0}^{k}(a_i 2^i)\bmod 2^k\right]\bmod 2^k=0$$

En réalité, nous n'avons rien inventé. Un certain Monsieur Pascal y avait déjà pensé au XVII^{ème} siècle et avait conçu un ruban pour appliquer ce nouveau critère de divisibilité.

Rubans de Pascal

Figure III. 6 : *Blaise Pascal (1623-1662)*

Le Français Blaise Pascal eut plusieurs casquettes dans sa vie, notamment celles d'inventeur, de physicien et de philosophe. Bien sûr, le Pascal auquel nous nous intéressons dans notre travail est mathématicien, et c'est lui qui a donné son nom aux fameux rubans.

En effet, tout comme nous, il s'est intéressé aux critères de divisibilité, et a mis en place une méthode à suivre pour déterminer si un nombre est divisible par un autre.

Moins de blablas, plus d'explications.

RUBAN

Dans un système de numération en base b, on appelle ruban d'un nombre $k \underset{not}{=} R_k$ la suite des résidus modulo k des puissances de la base b.

Si $b^i \bmod k = r_i$, le ruban est composé de la suite des r_i.

On exclut le cas k=1.

Illustration…

En base décimale:

$10^0 \bmod 7 = 1, 10^1 \bmod 7 = 3, 10^2 \bmod 7 = 2, 10^3 \bmod 7 = 6, 10^4 \bmod 7 = 4, 10^5 \bmod 7 = 5,$

$10^6 \bmod 7 = 1, 10^7 \bmod 7 = 3, 10^8 \bmod 7 = 2, 10^9 \bmod 7 = 6, 10^{10} \bmod 7 = 4, 10^{11} \bmod 7 = 5, \ldots$

PROPRIÉTÉS

Le ruban commence toujours par un 1.

En effet, ayant exclu 1 des diviseurs, le reste de la division de 1 par un nombre supérieur à 1 vaut 1.

$$\forall b \in \mathbb{N}_{0,1} : b^0 \bmod k = 1$$

Cette suite est toujours finie.

En effet, un nombre k ne possède que k résidus distincts (0, 1, 2, … k-1).

Si 0 apparait dans le ruban, tous les éléments suivants sont nuls. On dit alors que le ruban est fini, bien qu'en fait il soit terminé par une infinité de 0.

En effet, considérons $n \in \mathbb{N} : b^n \bmod k = 0.$
Alors, $\forall l \in \mathbb{N} : b^{n+l} \bmod k = 0$
car $b^{n+l} \bmod k = \left(\left(b^n \bmod k \right) . \left(b^l \bmod k \right) \right) \bmod k = 0$

La suite $\left(r_i \right)_{i \in \mathbb{N}}$ est périodique.

En effet, le nombre de résidus possibles étant limité, un résidu au moins doit se répéter.
Considérons $n \in \mathbb{N} : b^{n+q} \bmod k = b^q \bmod k = r_q$. *Alors,*
$\forall l \in \mathbb{N} : b^{n+q+l} \bmod k = \left(\left(b^{n+q} \bmod k \right) . \left(b^l \bmod k \right) \right) \bmod k$
ou encore
$b^{n+q+l} \bmod k = \left(\left(b^q \bmod k \right) . \left(b^l \bmod k \right) \right) \bmod k = b^{q+l} \bmod k$

NOTATION

Un ruban fini est noté $\left[r_0 r_1 r_2 ... \overline{0} \right]$.

Un ruban périodique est noté $\left[r_0 r_1 ... r_p \overline{r_{p+1} ... r_m} \right]$.

FILTRE

Soit $N \in \mathbb{Z}$ tel que $\mathrm{N} = \sum_{i=0}^{n} (a_i . b^i)$.

Grâce à la compatibilité des congruences avec la multiplication et l'addition :

$$\mathrm{N} \equiv \left[\sum_{i=0}^{n} (a_i . (b^i \bmod k)) \right] \bmod k$$

Or,
$$\sum_{i=0}^{n} (b^i \bmod k) = \sum_{i=0}^{n} r_i$$

Donc,
$$\mathrm{N} \equiv \left[\sum_{i=0}^{n} a_i . r_i \right] \bmod k$$

Ce nombre $\sum_{i=0}^{n} (a_i . r_i)$ est appelé filtre de N par k et est noté $f_k(\mathrm{N})$.

TECHNIQUE

La technique que Pascal nous propose est donc la suivante :

Pour déterminer si un entier N est divisible par un entier k, il faut calculer son filtre par k.

Si ce dernier est divisible par k, alors N est divisible par k. On peut bien sûr répéter l'opération indéfiniment jusqu'à avoir (ou pas) un multiple facile de k.

$$\boxed{N \equiv f_k(N) \bmod k \equiv f_k(f_k(N)) \bmod k}$$

Prenons un exemple concret :

Comment savoir si en base 8, le nombre N=$\overline{754502703}^8$ est divisible par $\bar{3}^8$?

1. D'abord calculons le ruban de 3 dans la base 8.

$$\overline{8^0 \bmod 3}^8 = \bar{1}^8,\ \overline{8^1 \bmod 3}^8 = \bar{2}^8,\ \overline{8^3 \bmod 3}^8 = \bar{1}^8,$$
$$\overline{8^4 \bmod 3}^8 = \bar{2}^8,\ \overline{8^5 \bmod 3}^8 = \bar{1}^8$$

$R_f = \left[1,2,\overline{1,2}\right]$

2. Calculons ensuite le filtre de N.

$$f_{\bar{3}^8}\left(\overline{754502703}^8\right) = \sum_{i=0}^{n}(a_i.r_i)$$

Pour ce faire, il suffit de multiplier chaque chiffre du nombre par le résidu modulo 3 qui correspond à son rang.

Il se trouve qu'ici, on peut arriver à une généralisation.

Soit $I = \{i \in \mathbb{N} \mid 0 \le i \le n \text{ et } i \text{ est impair}\}$

et $P = \{i \in \mathbb{N} \mid 0 \le i \le n \text{ et } i \text{ est pair}\}$

$$f_{\bar{3}^8}\left(\overline{754502703}^8\right) = \sum_{i \in P} a_i + 2.\sum_{i \in I} a_i = \overline{(3+7+4+7)+2.(2+5+5)}^8 = \overline{55}^8$$

3. Maintenant, vérifions si le filtre est divisible par $\bar{3}^8$.

$$\overline{754502703}^8 \equiv \overline{55}^8 \bmod \bar{3}^8$$

Bien sûr, $\overline{55}^8$ est peut-être plus court, mais rien n'indique qu'il est divisible par $\overline{3}^8$. Recommençons donc l'opération et calculons le filtre du filtre, jusqu'à obtenir une valeur facile.

$$f_{\overline{3}^8}\left(f_{\overline{3}^8}\left(\overline{754502703}^8\right)\right)=f_{\overline{3}^8}\left(\overline{55}^8\right)=\overline{5+2.5}^8=\overline{17}^8,$$

$$f_{\overline{3}^8}\left(f_{\overline{3}^8}\left(f_{\overline{3}^8}\left(\overline{754502703}^8\right)\right)\right)=f_{\overline{3}^8}\left(\overline{17}^8\right)=\overline{7+2}^8=\overline{11}^8,$$

$$f_{\overline{3}^8}\left(f_{\overline{3}^8}\left(f_{\overline{3}^8}\left(f_{\overline{3}^8}\left(\overline{754502703}^8\right)\right)\right)\right)=f_{\overline{3}^8}\left(\overline{11}^8\right)=\overline{1+2}^8=\overline{3}^8$$

$$\overline{754502703}^8\equiv\overline{3}^8 \bmod\overline{3}^8\equiv\overline{0}^8 \bmod\overline{3}^8$$

Notre nombre est donc bien divisible par $\overline{3}^8$.

Automates

Les critères de divisibilité reposent sur la représentation des nombres. On peut donc comparer un système de numération à un langage, possédant sa propre grammaire (la base choisie et son emploi dans le système de numération positionnelle) et son alphabet (l'ensemble des chiffres). Dans ce langage, chaque nombre est donc représenté par un mot.

Il est possible de construire un algorithme permettant de reconnaître le critère de divisibilité de chaque nombre en lisant le mot le représentant lettre par lettre, ou plutôt dans notre cas, chiffre par chiffre.

L'algorithme construit porte le nom d'automate fini. Un automate « lit » un mot écrit sur son ruban d'entrée. Il part d'un état initial et à chaque lettre lue, il change d'état. Si, à la fin du mot, il est dans un état final, on dit qu'il reconnaît le mot lu. Un automate fini est la donnée de plusieurs informations telles l'alphabet A dans lequel on code, un ensemble fini d'états, dans lesquels on distingue l'état initial et les états finaux.

Un mot est reconnu ou accepté par un automate fini s'il existe un chemin suivi par le mot menant de l'état initial à un état final.

Un automate se présente donc sous la forme d'un graphe orienté, c'est-à-dire un ensemble de sommets-états et de flèches permettant de passer d'un état à l'autre.

Illustration …

Pour illustrer la procédure, tâchons de reconnaître un nombre pair codé en base 3.

Voici l'automate reconnaissant les nombres pairs en base 3.

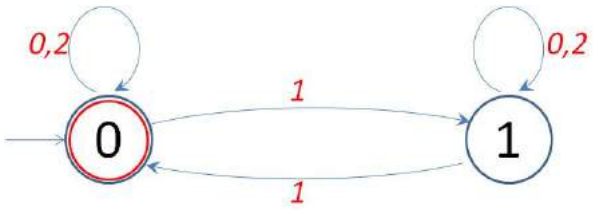


Figure 7 : *Automate reconnaissant les nombres pairs en base 3.*

L'alphabet est donc $A = \{0,1,2\}$. Les états à considérer, 0 et 1, correspondent aux seuls résidus modulo 2 possibles. L'état initial et l'état final coïncident tous deux avec 0.

Considérons un naturel $N=\sum_{i=0}^{n} a_i 3^i = \overline{a_n \ldots a_1 a_0}^{3}$ où $a_i \in \{0,1,2\}$.

Un automate lit un nombre, un mot de gauche à droite, en commençant sa lecture par le chiffre de poids fort, soit ici a_n.

Si $a_n=0$ ou $a_n=2$, $a_n \bmod 2=0$, et l'automate maintient la position dans l'état 0. Par contre, si $a_n=1$, l'automate bascule la position vers l'état 1.

L'automate poursuit sa lecture en saisissant a_{n-1}.

Nous considérons à présent un nombre sous la forme $\overline{a_n a_{n-1}}^{3}$ dont nous devons étudier le reste dans la division par 2.

$$\left(\overline{a_n a_{n-1}}^{3}\right) \bmod 2 = \left[\left(a_n.3\right) \bmod 2 + a_{n-1} \bmod 2\right] \bmod 2$$

Donc, si nous étions sur l'état 0, la situation est identique à ce qui s'est produit pour a_n : une valeur de a_{n-1} égale à 0 ou 2 conserve l'état 0, une valeur 1 envoie sur l'état 1.

Par contre, si nous étions en 1 ($a_n mod 2=1$), la position reste sur 1 si a_{n-1} prend une valeur paire et bascule sur 0 si a_{n-1} vaut 1.

Et on recommence en analysant le chiffre se trouvant à la droite, jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de chiffre à lire. On observe la position de fin de lecture. Si elle coïncide avec l'état 0, le nombre lu est pair.

Tout comme le ruban de Pascal, cette méthode s'adapte à toute base b naturelle et tout diviseur d.

L'automate est toujours représenté par un graphe orienté possédant d sommets correspondant aux valeurs des d résidus possibles modulo d, de chaque sommet partent b arcs, un par chiffre possible de la base.

La lecture d'un nouveau chiffre a_i fait passer de l'état e à l'état $e'=(e.b+a_i) mod d$.

Illustration …

Voici un automate plus complexe reconnaissant les diviseurs de 5 en base 8.

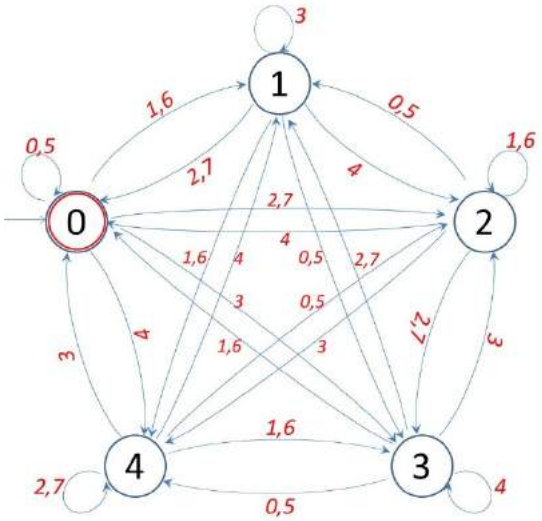


Figure 8 : *Automate reconnaissant les diviseurs de 5 en base 8.*

Les automates sont implémentés dans de nombreuses machines, en particulier dans les logiciels de traitement de texte où ils remplissent la fonction de recherche de mot dans un texte.

La preuve par 9 est une méthode de calcul simple qui permet de vérifier si un calcul est certainement faux ou bien de dire qu'il sera probablement juste. Elle n'est en effet pas infaillible. On l'utilise principalement dans le cadre de multiplications ou de divisions bien que l'on puisse l'appliquer à toutes les opérations.

Explications en base 10

Pour faire la preuve par 9 du produit « $a \times b = c$ », il suffit de comparer le produit du résidu modulo 9 du multiplicande *a* par le résidu modulo 9 du multiplicateur *b* au résidu modulo 9 du produit *c*. Si les deux termes sont congrus entre eux, alors la preuve par 9 est réussie.

La preuve par 9 réussit $\Leftrightarrow (a \bmod 9 \times b \bmod 9) \equiv c \bmod 9$

Remarque : Pour obtenir le résidu modulo 9 d'un nombre « N », il suffit d'effectuer la somme des chiffres qui le composent, et de recommencer l'opération jusqu'à l'obtention d'un nombre inférieur à 9. En effet, nous avons vu précédemment que, si $N = \overline{a_n ... a_1 a_0}^{10}$, alors $N \equiv \left(\sum_{i=0}^{n} a_i \right) \bmod 9$.

Illustration… Soit à vérifier : **24x17=408**.

$$(24 \bmod 9 \times 17 \bmod 9) \overset{?}{\equiv} 408 \bmod 9$$

$$(6 \bmod 9 \times 8 \bmod 9) \overset{?}{\equiv} 12 \bmod 9$$

$$48 \bmod 9 \overset{?}{\equiv} 3 \bmod 9$$

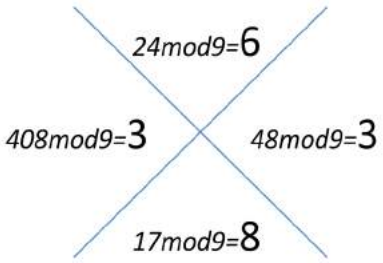
$$12 \bmod 9 \overset{?}{\equiv} 3 \bmod 9$$

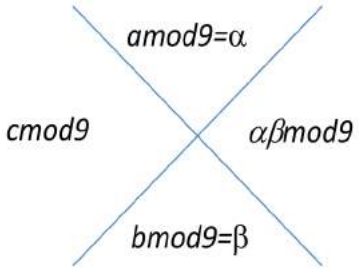
$$3 \bmod 9 \equiv 3 \bmod 9$$

La preuve a réussi. Il est **possible** que le résultat soit juste !

Autrefois enseignée à l'école primaire, la preuve par 9 prenait cette forme de croix.

1. Dans le haut de la croix, on place le résidu modulo 9 du multiplicande a, dans notre exemple 6. Appelons cette valeur α.
2. Dans le bas de la croix, on place le résidu modulo 9 du multiplicateur b, dans notre exemple 8. Appelons cette valeur β.
3. Dans la zone gauche, on place le résidu modulo 9 du produit c, dans notre exemple 3.
4. Dans la zone droite, on place le résidu modulo 9 du produit αβ, dans notre exemple 3 également.





Le principe est le même pour l'addition $(a+b=c)$ et la soustraction $(a-b=c)$ à par le fait que, à la place du produit des résidus modulo 9 des deux premiers termes, il faille en faire la somme (ou la différence pour la soustraction) avant de les comparer au résidu modulo 9 du résultat c.

Illustrations… Soit à vérifier …

45+73=181

Nous commettons intentionnellement une erreur de calcul!

$$(45\bmod 9+73\bmod 9)\overset{?}{\equiv}181\bmod 9$$

$$(0\bmod 9+1\bmod 9)\overset{?}{\equiv}1\bmod 9$$

$$1\bmod 9\equiv 1\bmod 9$$

Ceci prouve que la preuve n'est pas infaillible !

57-22=35

$$(57\bmod 9-22\bmod 9)\overset{?}{\equiv}35\bmod 9$$

$$(3\bmod 9-4\bmod 9)\overset{?}{\equiv}8\bmod 9$$

$$-1\bmod 9\overset{?}{\equiv}8\bmod 9$$

$$8\bmod 9\overset{?}{\equiv}8\bmod 9$$

Notre calcul est probablement juste.

Pour la division, il suffit de penser au modèle « $quotient \times diviseur + reste = dividende$ » ou « *qxd + r = D* » et de comparer la somme du produit du résidu modulo 9 du quotient *q* par le résidu modulo 9 du diviseur *d* et du résidu modulo 9 du reste *r* au résidu modulo 9 du dividende *D*.

Illustration… Soit à vérifier … **309=18x17 + 3**

$$309 \bmod 9 \overset{?}{\equiv} (18 \bmod 9 \times 17 \bmod 9 + 3 \bmod 9) \bmod 9$$

$$3 \bmod 9 \overset{?}{\equiv} (0 \bmod 9 \times 8 \bmod 9 + 3 \bmod 9) \bmod 9$$

$$3 \bmod 9 \equiv 3 \bmod 9$$

JUSTIFICATION DE CETTE PREUVE EN BASE 10

La preuve par 9 fonctionne grâce à la compatibilité de la congruence avec l'addition et la multiplication que nous expliquons dans l'annexe II.

$$\forall n \in N_0, \forall a,b,c,d \in \mathbb{Z}, \text{ si } a \equiv c \bmod n \text{ et } b \equiv d \bmod n,$$
$$\text{alors } (a+b) \equiv (c+d) \bmod n \text{ et } ab \equiv (cd) \bmod n$$

Cette preuve peut donc fonctionner avec n'importe quel naturel non nul.

Illustration… Utilisons une preuve par 4 pour vérifier l'opération

17x9 =153

$$(17 \bmod 4 \times 9 \bmod 4) \overset{?}{\equiv} 153 \bmod 4$$

$$(1 \bmod 4 \times 1 \bmod 4) \overset{?}{\equiv} 1 \bmod 4$$

La preuve par 4 a réussi : cette méthode nous informe aussi que le résultat est **probablement** correct.

INCONVÉNIENT

Bien qu'on puisse affirmer que l'opération soit toujours fausse quand la preuve par 9 échoue, quand la preuve par 9 réussit, cela ne signifie pas pour autant que l'opération est juste. Cela montre simplement qu'il y a de grandes chances qu'elle soit correcte.

Il est donc possible que $a \equiv b \bmod 9$, bien que $a \neq b$.

La preuve par 9 constitue donc une condition nécessaire mais pas suffisante.

Illustration… Voici une opération erronée **24x17=417**

$$(24 \bmod 9 \times 17 \bmod 9) \overset{?}{\equiv} 417 \bmod 9$$

$$(6 \bmod 9 \times 8 \bmod 9) \overset{?}{\equiv} 3 \bmod 9$$

$$48 \bmod 9 \overset{?}{\equiv} 3 \bmod 9$$

$$3 \bmod 9 \equiv 3 \bmod 9$$

La preuve par 9 a réussi et pourtant $24x17=408 \neq 417$.

LA PREUVE PAR N EN BASE 10

Puisqu'on aurait pu employer tout autre naturel non nul pour cette preuve, il est normal de se demander pourquoi avoir privilégié le nombre 9.

Il y a deux raisons à cela :

1. Chercher un résidu modulo 9 est très simple car il suffit d'additionner tous les chiffres composant ce nombre jusqu'à ce qu'on arrive à un résultat inférieur à 9. Alors que calculer le résidu modulo 4 d'un nombre est déjà beaucoup plus fastidieux. Alors ne pensons même pas aux nombres tels que 13, 17 et 19 ! La plupart des nombres supérieurs à 10 sont éliminés pour cette raison. La preuve par 11 est cependant parfois employée vu la relative facilité d'obtention du résidu modulo 11 d'un nombre (cf. page 106).

2. Il existe 9 résidus modulo 9 différents (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8) :

$$(9n) \bmod 9 = 0$$
$$(9n+1) \bmod 9 = 1$$
$$(9n+2) \bmod 9 = 2$$
$$\ldots$$
$$(9n+8) \bmod 9 = 8$$
$$(9n+9) \bmod 9 \equiv 9(n+1) \bmod 9 = o$$
$$etc$$

Alors qu'il n'existe que 4 résidus modulo 4 différents (0, 1, 2 et 3) :

$$(4n) \bmod 4 = 0$$
$$(4n+1) \bmod 4 = 1$$
$$(4n+2) \bmod 4 = 2$$
$$(4n+3) \bmod 4 = 3$$
$$(4n+4) \bmod 4 \equiv 4(n+1) \bmod 4 = o$$
$$etc$$

La probabilité que deux termes différents soit congrus entre eux alors qu'ils sont différents augmente donc plus le nombre par lequel on fait la preuve est petit. Une preuve réussie ne donne donc pas dans ce cas une grande probabilité d'opération réussie.

La combinaison de ces deux arguments désigne donc la preuve par 9 comme étant la plus efficace. (9 est préféré à 11 car, même si la preuve par 11 offre plus de possibilités de résidus, l'opération $a \bmod 11$ s'avère plus ardue que l'opération $a \bmod 9$).

Généralisation en base b

Cette preuve reposant sur les propriétés des résidus et congruences est facilement généralisable dans un système de numération positionnelle en base b.

Soit n, un nombre naturel non nul codé dans la base b.

Considérant l'opération $\otimes$ comme représentant l'addition, la soustraction ou la multiplication usuelles, nous énonçons la **preuve par n** de la façon suivante :

Soit $x, y, z \in \mathbb{Z}$:

$$x \otimes y = z \Rightarrow (x \bmod n \otimes y \bmod n) \equiv z \bmod n$$

En restant dans la logique du point précédent, on peut déduire qu'en base b, les nombres n qui apportent une facilité de calcul et une grande probabilité de réussite maximale sont tels que *n=b-1*, pour autant que la base soit grande. Ainsi, dans le système binaire, aucune preuve ne s'avère vraiment efficace.

Illustrations… Utilisons une preuve par 7 dans le système octal.

$$\overline{177}^{8} \times \overline{526}^{8} \stackrel{?}{=} \overline{134651}^{8}$$

$$\left(\overline{177}^{8} \bmod \overline{7}^{8} \times \overline{526}^{8} \bmod \overline{7}^{8}\right) \stackrel{?}{\equiv} \overline{134651}^{8} \bmod \overline{7}^{8}$$

$$\left(\overline{17}^{8} \bmod \overline{7}^{8} \times \overline{15}^{8} \bmod \overline{7}^{8}\right) \stackrel{?}{\equiv} \overline{24}^{8} \bmod \overline{7}^{8}$$

$$\left(\overline{1}^{8} \bmod \overline{7}^{8} \times \overline{6}^{8} \bmod \overline{7}^{8}\right) \equiv \overline{6}^{8} \bmod \overline{7}^{8}$$

$$\overline{277777}^{8} + \overline{123\,521}^{8} \stackrel{?}{=} \overline{423520}^{8}$$

$$\left(\overline{277777}^{8} \bmod \overline{7}^{8} + \overline{123\,521}^{8} \bmod \overline{7}^{8}\right) \stackrel{?}{\equiv} \overline{423520}^{8} \bmod \overline{7}^{8}$$

$$\left(\overline{45}^{8} \bmod \overline{7}^{8} + \overline{16}^{8} \bmod \overline{7}^{8}\right) \stackrel{?}{\equiv} \overline{20}^{8} \bmod \overline{7}^{8}$$

$$\left(\overline{9}^{8} \bmod \overline{7}^{8} + \overline{7}^{8} \bmod \overline{7}^{8}\right) \stackrel{?}{\equiv} \overline{2}^{8} \bmod \overline{7}^{8}$$

$$\left(\overline{2}^{8} \bmod \overline{7}^{8} + \overline{0}^{8} \bmod \overline{7}^{8}\right) \equiv \overline{2}^{8} \bmod \overline{7}^{8}$$

Ces résultats sont **probablement** corrects.

EN FIN DE COMPTE …

Il est temps de mettre un point final à notre projet et de regarder en arrière. Au commencement, nous nous demandions comment pouvaient compter les Simpson avec seulement huit doigts. En effet le genre humain a préféré la base décimale à cause de ses dix doigts. Considérant une autre façon de compter, notre recherche nous a ouvert de nouveaux horizons et de nouveaux questionnements.

Nous sommes ressortis grandis de cette expérience qui nous a, non seulement, fourni un approfondissement de notre culture mathématique mais aussi une faculté de travailler en groupe et de mener à bien un projet.

Premièrement, d'un point de vue historique, nous nous sommes rendu compte du chemin parcouru par l'humanité pour arriver à notre système de numération positionnel. La nécessité de comptabiliser les biens obligea l'homme à inventer un système de numération. Le premier fut naturellement additif. Mais très vite, les limites de ce système de numération additionnel se manifestèrent, comme son incapacité à produire des grands nombres. Certains peuples résolurent partiellement cette difficulté en employant un système hybride, mais qui n'était pas sans tare non plus. D'abord, ce système était restreint par son nombre de symboles et, ensuite, par sa complexité de représentation.

Finalement, dans des lieux éloignés, de façon isolée, une idée simple et géniale apparut : utiliser conjointement les chiffres et leur position pour désigner le nombre et surtout inventer un zéro. Le petit nombre de chiffres nécessaires, les facilités de calculs ainsi que sa capacité illimitée de représentation firent du système de numération positionnel le plus plébiscité de l'histoire.

Cependant, l'épopée du système de numération positionnel ne se limita pas à l'emploi de la base dix. D'autres bases furent employées et aujourd'hui encore, il est pertinent d'envisager l'emploi de bases différentes en fonction de nos besoins. Ainsi, nos découvertes nous ont permis d'apprécier combien les bases deux, huit et seize trouvent leur utilité dans le codage informatique, mais plus surprenant encore, que des systèmes de numération positionnels aussi insolites que celui du mathématicien belge Edouard Zeckendorf, ou les systèmes d'Avizienis ou phinaire présentent également un intérêt.

En fin de compte, que devient l'arithmétique dans un système positionnel de base différente de dix ? Le troisième épisode de cette aventure nous a montré qu'un changement de base n'altère pas ses principes généraux ni ses propriétés, seule l'apparence des calculs est modifiée. Une preuve par neuf devient une preuve par sept en base huit, mais le procédé opératoire est toujours le même. Des critères de divisibilité peuvent toujours être envisagés, dans des formes différentes, liées à la nouvelle syntaxe des nombres. Des outils comme le ruban de Pascal et l'arithmétique modulaire permettent facilement de généraliser ces derniers dans d'autres bases.

En conclusion, on peut affirmer que l'emploi de la base décimale est bien sûr légitimée par nos dix doigts, mais qu'il n'y a rien de délirant à compter comme un Simpson ou dans une autre base, d'autant qu'il y a longtemps que nous ne comptons plus sur nos doigts ! Qui sait, un jour peut-être, les générations futures auront à calculer dans un système positionnel de base huit ou seize, afin de se conformer au système numérique des machines. Les habitudes de calculs auraient certes à changer en profondeur, mais l'exercice ne serait peut-être pas plus difficile que lors du passage à la monnaie unique en 2002. Mais pour l'instant, cela relève encore de la science-fiction.

AI. FRISE CHRONOLOGIQUE

Os de Lebombo, première trace de numération

-35 000

Les Sumériens inventent le calculi

-9 000

Les Égyptiens utilisent les hiéroglyphes dans un système de numération additif

-3 000

-36 000 | -35 000 | [-34 000.....-16 000] | -15 000 | [-14 000.....-10 000] | -9 000 | [-8 000.....-4 000] | -3 000 | -2 000

Bois de renne entaillé

-15 000

Les Incas inventent le quipu

-2500

AI. FRISE CHRONOLOGIQUE

Les Japonais et les Chinois utilisent la numération sino-japonaise, basée sur un système hybride

-1500

Les Romains utilisent un système de numération additif

-500

-2000

[-1400.....-1000]

Les Babyloniens inventent la première numération positionnelle (de base 60)

-1800

Les Grecs inventent la numération ionique, basée sur un système additif

-700

Les Grecs inventent la numération attique, basée sur un système additif

-500

AI. FRISE CHRONOLOGIQUE

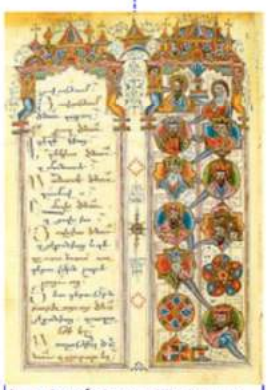
Les Chinois utilisent un système de numération hybride dit "à bâtons"

-100

1

Les Mayas utilisent un système de numération positionnel

-300



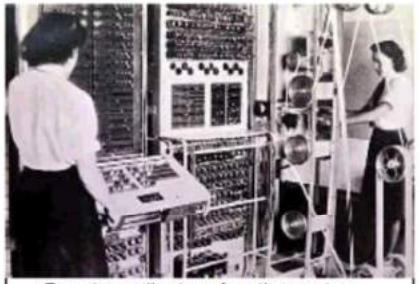
Les Arméniens utilisent un système de numération additif

500

AI. FRISE CHRONOLOGIQUE

Première apparition des chiffres Indiens
1000

Première apparition des chiffres modernes
1500



Premier ordinateur fonctionnant en langage binaire, le Colossus
1937

James CAMERON crée le film Avatar et avec celui-ci la numération additive Navi
2009

1000

2000

Première apparition des chiffres arabes
1300

Blaise PASCAL
1623 à 1662

Edouard ZECKENDORF
1901 à 1983

Les Tchouvaches utilisent un système de numération additif
1901

[135]

Division euclidienne et divisibilité dans $\mathbb{Z}$

THÉORÈME

$\forall (a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_0, \exists ! (q,r) \in \mathbb{Z}^2$ tel que

$a = b.q + r$ et $0 < r < |B|$

On dit que a est le dividende, b le diviseur, q le quotient et r le reste dans la division de a par b.

DÉFINITION

Soit a et $b \in \mathbb{Z}$.

a divise $b \Leftrightarrow \exists\, q \in \mathbb{Z}$ tel que $b = a.q$.

On écrit alors $a|b$.

On dit aussi : «b est *divisible* par a »

«a est un *diviseur* de b ».

«b est un *multiple* de a ».

PROPRIÉTÉS

1) $\forall$ a, b ; c $\in \mathbb{Z}$: $a|b \Rightarrow a|bc$

2) $\forall$ a, b ; c $\in \mathbb{Z}$: $a|b \wedge b|c \Rightarrow b|c$

3) $\forall$ a, b ; c $\in \mathbb{Z}$, $\forall$ k, h $\in \mathbb{Z}$: $a|b \wedge a|c \Rightarrow a|(k.b+h.c)$

4) $\forall$ a $\in \mathbb{Z}$ $\forall$ b $\in \mathbb{Z}_0$ $a|b \Rightarrow |a| \leq |b|$.

Ainsi, tout entier non nul admet un nombre fini de diviseurs.

5) $\forall$ a, b $\in \mathbb{Z}$: $a/b \wedge b/a \Rightarrow a = \pm b$

Congruences et résidus modulos m

DÉFINITIONS

Soit a et $b \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{N}_0$.

a est **congru** à b modulo $m \Leftrightarrow n \mid (a-b)$

On écrit alors $a \equiv b(n)$ ou $a \equiv b \bmod n$ ou encore $a \equiv b$ ***modulo*** n

$\forall a, b \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}_0$, $a \equiv b \ (mod\ n) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : a = kn + b$

Illustrations $18 \equiv 10 \bmod 8$ *car* $8 \mid (18-10)$

De plus, $18 = 1.8 + 10$

Il est à noter que $\forall a \in \mathbb{Z}$ et $\forall b \in \mathbb{N}_0$ $a \mid b \Leftrightarrow a \equiv 0 \bmod b$

Cependant, si a ≡ b(mod n), b n'est le reste de la division de a par n que si 0 ≤ b <n.

On peut alors définir l'opération mathématique suivante :

$\forall a \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}_0$, $b = a \bmod n \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : a = kn + b$ *et* $0 \leq b < n$.

Dans ce cas, b est le reste de la division de a par n. On l'appelle « **résidu de a modulo n** ».

Illustrations $18 \bmod 8 = 2$

NOTION DE CLASSE

Les nombres entiers peuvent être classés selon leur congruence.

Par exemple, 2, 10, 18, 26, … sont tous congrus modulo 8.

Le reste de leur division euclidienne par 8 vaut 2.

$2 = 2 \bmod 8 = 10 \bmod 8 = 18 \bmod 8 = 26 \bmod 8$

Ces entiers font partie d'un même ensemble, appelé **classe**. Ici, 2, 10, 18 et 26 en modulo 8 appartiennent à la classe de résidu égale à 2. On notera cette classe $\overline{2}_8$.

La définition d'une classe est donc : $\overline{c_m} = \{c+k.m / k \in \mathbb{Z}\}$ tel que $\overline{c_m}$ désigne à la fois la classe (ensemble de nombres congrus modulo m) et son résidu.

Par ailleurs, il est à noter qu'il existe m classes en modulo m : $\overline{0_m}, \overline{1_m}, \overline{2_m}, \ldots, \overline{(m-1)_m}$ et respectivement m représentants de ces classes : 0, 1, …, m-1.

On définit alors l'ensemble des entiers représentant les classes de modulo m:

$\mathbb{Z}_m = \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$

$\mathbb{Z}_m = \{c \in \mathbb{N} \mid a = c+km, c<m, a \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}\}$

OPÉRATIONS ET CONGRUENCES

On peut montrer que l'addition et la multiplication sont compatibles avec la congruence :

(1) *(a+b) (mod m) = (a (mod m) + b (mod m))(mod m)*

(2) *(a.b) (mod m) = (a (mod m) . b (mod m))(modm)*

Ceci permet de définir l'addition et la multiplication dans $\mathbb{Z}_m$:

$+ : \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_m : (\bar{a}, \bar{b}) \to \bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b}$	$. : \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_m : (\bar{a}, \bar{b}) \to \bar{a}.\bar{b} = \overline{a.b}$
• Interne et partout définie $\overline{a+b} \in \mathbb{Z}_m, \forall \bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_m$ • Commutative $\forall \bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_m : \bar{a}+\bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$ • Associative $\forall \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_m : (\bar{a}+\bar{b})+\bar{c} = \bar{a}+(\bar{b}+\bar{c})$ • Elément neutre $\forall \bar{a} \in \mathbb{Z}_m : \bar{a} + \bar{0} = \bar{0} + \bar{a} = \bar{a}$ • Inverse $\forall \bar{a} \in \mathbb{Z}_m : \bar{a} + \overline{m-a} = \bar{0}$	• Interne et partout définie $\overline{a.b} \in \mathbb{Z}_m, \forall \bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_m$ • Commutative $\forall \bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_m : \bar{a}.\bar{b} = \bar{b}.\bar{a}$ • Associative $\forall \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_m : (\bar{a}.\bar{b}).\bar{c} = \bar{a}.(\bar{b}.\bar{c})$ • Elément neutre $\forall \bar{a} \in \mathbb{Z}_m : \bar{a}.\bar{1} = \bar{1}.\bar{a} = \bar{a}$ • Distributive par rapport à + $\forall \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \mathbb{Z}_m : (\bar{a}+\bar{b}).\bar{c} = \bar{a}.\bar{c} + \bar{b}.\bar{c}$

AIII. CODE DU PROGRAMME DE CHANGEMENT DE BASE

Nous avons réalisé un petit programme permettant de transcrire un nombre naturel d'une base a vers une base b quelconque, a et b étant des naturels compris entre 2 et 9.

En voici le code.

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

int main()
{
        //Ici nous initialisons les morceaux de mémoire qui vont contenir des chiffres permettant le bon fonctionnement du programme.
   int Base = 0;
   int BaseDebut = 0;
   int NombreChoisi = 0;
   int NombreChoisi2 = 0;
   int tour = 0;
   int NombreFinal = 0;
   int exposant = 0;
   int retirer = 0;
   int menu = 0;
   int fin = 0;
        //Ici nous initialisons les morceaux de mémoire qui vont contenir les différents chiffres qui composent le nombre de départ.
   int Nombre1 = 0;
   int Nombre2 = 0;
   int Nombre3 = 0;
   int Nombre4 = 0;
   int Nombre5 = 0;
   int Nombre6 = 0;
   int Nombre7 = 0;
   int Nombre8 = 0;
   int Nombre9 = 0;
        //Ici nous initialisons les morceaux de mémoire qui vont contenir les différents chiffres qui composent le nombre finale.
   int Chiffre1 = 0;
   int Chiffre2 = 0;
   int Chiffre3 = 0;
   int Chiffre4 = 0;
   int Chiffre5 = 0;
   int Chiffre6 = 0;
   int Chiffre7 = 0;
   int Chiffre8 = 0;
   int Chiffre9 = 0;
   int Chiffre10 = 0;

   printf("Bonjour, ce programme vous permettra de trasformer :\n");
   printf("1. Un nombre XXXXXXXXX (9 chiffres maximun) en base a dans une base b (les base peuvent aller de 1 a 10)\n");
   printf("2. Un nombre XXXXXXXXX (9 chiffres maximun) en base 10 dans une base b (les base peuvent aller de 1 a 10)\n");
   printf("3. Un nombre XXXXXXXXX (9 chiffres maximun) en base a dans la base 10 (les base peuvent aller de 1 a 10)\n");
   printf("Veillez introduire le chiffre du menu que vous avez choisi:");
   scanf("%d", &menu);
if(menu == 1)
  {
   printf("Veillez introduire la base de depart (la base a)\n");
   scanf("%d", &BaseDebut);
   printf("Veillez introduire la base finale (la base b)\n");
   scanf("%d", &Base);
   printf("Veillez introduire le nombre que vous avez choisi\n");
   scanf("%d", &NombreChoisi);
        //Ici nous allons extraire les chiffres du nombre de base a.
   Nombre9 = NombreChoisi / 100000000 - retirer;
        retirer = retirer + Nombre9 * 10;
Nombre8 = NombreChoisi / 10000000 - retirer;
        retirer = retirer + Nombre8 * 10;
   Nombre7 = NombreChoisi / 1000000 - retirer;
        retirer = retirer + Nombre7 * 10;
   Nombre6 = NombreChoisi / 100000 - retirer;
        retirer = retirer + Nombre6 * 10;
   Nombre5 = NombreChoisi / 10000 - retirer;
        retirer = retirer + Nombre5 * 10;
   Nombre4 = NombreChoisi / 1000 - retirer;
         retirer = retirer + Nombre4 * 10;
   Nombre3 = NombreChoisi / 100 - retirer;
```

```
        retirer = retirer * 10 + Nombre3 * 10;
    Nombre2 = NombreChoisi / 10 - retirer;
        retirer = retirer * 10 + Nombre2 * 10;
    Nombre1 = NombreChoisi / 1 - retirer;
  //Ici, transcription des différents chiffres de la
    base a à la base b puis nous les additionnons
                pour obtenir le nombre en base 10.
    Nombre1 = Nombre1;
     exposant = BaseDebut;
    Nombre2 = Nombre2 * BaseDebut;
     exposant = exposant * BaseDebut;
    Nombre3 = Nombre3 * exposant;
     exposant = exposant * BaseDebut;
    Nombre4 = Nombre4 * exposant;
     exposant = exposant * BaseDebut;
    Nombre5 = Nombre5 * exposant;
     exposant = exposant * BaseDebut;
    Nombre6 = Nombre6 * exposant;
     exposant = exposant * BaseDebut;
    Nombre7 = Nombre7 * exposant;
     exposant = exposant * BaseDebut;
    Nombre8 = Nombre8 * exposant;
     exposant = exposant * BaseDebut;
    Nombre9 = Nombre9 * exposant;
     exposant = exposant * BaseDebut;
    NombreChoisi2 = Nombre1 + Nombre2 +
Nombre3 + Nombre4 + Nombre5 + Nombre6
+ Nombre7 + Nombre8 + Nombre9;
   //Ici nous allons convertir le nombre en base
                                    10 en base b.
    while (NombreChoisi2 != 0)
    {
      if (tour == 0)
      {
        Chiffre1 = NombreChoisi2 % Base;
      }
      if (tour == 1)
      {
        Chiffre2 = NombreChoisi2 % Base;
      }
      if (tour == 2)
      {
        Chiffre3 = NombreChoisi2 % Base;
      }
      if (tour == 3)
      {
        Chiffre4 = NombreChoisi2 % Base;
      }
      if (tour == 4)
      {
        Chiffre5 = NombreChoisi2 % Base;
      }
      if (tour == 5)
      {
        Chiffre6 = NombreChoisi2 % Base;
      }
      if (tour == 6)
      {
        Chiffre7 = NombreChoisi2 % Base;
      }
      if (tour == 7)
      {
        Chiffre8 = NombreChoisi2 % Base;
      }
      if (tour == 8)
      {
        Chiffre9 = NombreChoisi2 % Base;
      }
      if (tour == 9)
      {
        Chiffre10 = NombreChoisi2 % Base;
      }
      NombreChoisi2 = NombreChoisi2 / Base;
      tour++;
    }
       //Ici nous plaçons chaque symbole au bon
                                          rang.
Chiffre1 = Chiffre1 * 1;
Chiffre2 = Chiffre2 * 10;
Chiffre3 = Chiffre3 * 100;
Chiffre4 = Chiffre4 * 1000;
Chiffre5 = Chiffre5 * 10000;
Chiffre6 = Chiffre6 * 100000;
Chiffre7 = Chiffre7 * 1000000;
Chiffre8 = Chiffre8 * 10000000;
Chiffre9 = Chiffre9 * 100000000;
Chiffre10 = Chiffre10 * 1000000000;
   }
   if(menu == 2)
   {
    BaseDebut = 10;
    printf("Veillez introduire la base finale (la
base b)\n");
    scanf("%d", &Base);
    printf("Veillez introduire le nombre que
vous avez choisi\n");
    scanf("%d", &NombreChoisi);
    NombreChoisi2 = NombreChoisi;
   //Ici nous allons convertir le nombre en base
                                    10 en base b.
    while (NombreChoisi2 != 0)
    {
      if (tour == 0)
      {
        Chiffre1 = NombreChoisi2 % Base;
      }
      if (tour == 1)
      {
```

```
      Chiffre2 = NombreChoisi2 % Base;
    }
    if (tour == 2)
    {
      Chiffre3 = NombreChoisi2 % Base;
    }
    if (tour == 3)
    {
      Chiffre4 = NombreChoisi2 % Base;
    }
    if (tour == 4)
    {
      Chiffre5 = NombreChoisi2 % Base;
    }
    if (tour == 5)
    {
      Chiffre6 = NombreChoisi2 % Base;
    }
    if (tour == 6)
    {
      Chiffre7 = NombreChoisi2 % Base;
    }
    if (tour == 7)
    {
      Chiffre8 = NombreChoisi2 % Base;
    }
    if (tour == 8)
    {
      Chiffre9 = NombreChoisi2 % Base;
    }
    if (tour == 9)
    {
      Chiffre10 = NombreChoisi2 % Base;
    }
    NombreChoisi2 = NombreChoisi2 / Base;
    tour++;
  }
 //Ici nous plaçons chaque chiffre au bon rang.
Chiffre1 = Chiffre1 * 1;
Chiffre2 = Chiffre2 * 10;
Chiffre3 = Chiffre3 * 100;
Chiffre4 = Chiffre4 * 1000;
Chiffre5 = Chiffre5 * 10000;
Chiffre6 = Chiffre6 * 100000;
Chiffre7 = Chiffre7 * 1000000;
Chiffre8 = Chiffre8 * 10000000;
Chiffre9 = Chiffre9 * 100000000;
Chiffre10 = Chiffre10 * 1000000000;
  }
  if(menu == 3)
  {
   int base = 10;
   printf("Veillez introduire la base de depart
(la base a)\n");
   scanf("%d", &BaseDebut);
   printf("Veillez introduire le nombre que
vous avez choisi\n");
   scanf("%d", &NombreChoisi);
   Base = 10;
       //Ici nous allons extraire les symboles du
                                  nombre de base a.
   Nombre9 = NombreChoisi / 100000000 -
retirer;
        retirer = retirer + Nombre9 * 10;
   Nombre8 = NombreChoisi / 10000000 -
retirer;
        retirer = retirer + Nombre8 * 10;
   Nombre7 = NombreChoisi / 1000000 -
retirer;
        retirer = retirer + Nombre7 * 10;
   Nombre6 = NombreChoisi / 100000 -
retirer;
        retirer = retirer + Nombre6 * 10;
   Nombre5 = NombreChoisi / 10000 -
retirer;
        retirer = retirer + Nombre5 * 10;
   Nombre4 = NombreChoisi / 1000 - retirer;
         retirer = retirer + Nombre4 * 10;
   Nombre3 = NombreChoisi / 100 - retirer;
         retirer = retirer * 10 + Nombre3 * 10;
   Nombre2 = NombreChoisi / 10 - retirer;
         retirer = retirer * 10 + Nombre2 * 10;
   Nombre1 = NombreChoisi / 1 - retirer;
//Ici nous passons les différents symboles de la
   base a à la base b puis nous les additionnons
              pour obtenir le nombre en base 10.
   Nombre1 = Nombre1;
    exposant = BaseDebut;
   Nombre2 = Nombre2 * BaseDebut;
    exposant = exposant * BaseDebut;
   Nombre3 = Nombre3 * exposant;
    exposant = exposant * BaseDebut;
   Nombre4 = Nombre4 * exposant;
    exposant = exposant * BaseDebut;
   Nombre5 = Nombre5 * exposant;
    exposant = exposant * BaseDebut;
   Nombre6 = Nombre6 * exposant;
    exposant = exposant * BaseDebut;
   Nombre7 = Nombre7 * exposant;
    exposant = exposant * BaseDebut;
   Nombre8 = Nombre8 * exposant;
    exposant = exposant * BaseDebut;
   Nombre9 = Nombre9 * exposant;
    exposant = exposant * BaseDebut;
   NombreChoisi2 = Nombre1 + Nombre2 +
Nombre3 + Nombre4 + Nombre5 + Nombre6
+ Nombre7 + Nombre8 + Nombre9;
```

```
  //Ici nous allons convertir le nombre en base 10 en base b.
  while (NombreChoisi2 != 0)
  {
    if (tour == 0)
    {
      Chiffre1 = NombreChoisi2 % Base;
    }
    if (tour == 1)
    {
      Chiffre2 = NombreChoisi2 % Base;
    }
    if (tour == 2)
    {
      Chiffre3 = NombreChoisi2 % Base;
    }
    if (tour == 3)
    {
      Chiffre4 = NombreChoisi2 % Base;
    }
    if (tour == 4)
    {
      Chiffre5 = NombreChoisi2 % Base;
    }
    if (tour == 5)
    {
      Chiffre6 = NombreChoisi2 % Base;
    }
    if (tour == 6)
    {
      Chiffre7 = NombreChoisi2 % Base;
    }
    if (tour == 7)
    {
      Chiffre8 = NombreChoisi2 % Base;
    }
    if (tour == 8)
    {
      Chiffre9 = NombreChoisi2 % Base;
    }
    if (tour == 9)
    {
      Chiffre10 = NombreChoisi2 % Base;
    }
    NombreChoisi2 = NombreChoisi2 / Base;
    tour++;
  }
    //Ici nous plaçons chaque symbole au bon rang.
Chiffre1 = Chiffre1 * 1;
Chiffre2 = Chiffre2 * 10;
Chiffre3 = Chiffre3 * 100;
Chiffre4 = Chiffre4 * 1000;
Chiffre5 = Chiffre5 * 10000;
Chiffre6 = Chiffre6 * 100000;
Chiffre7 = Chiffre7 * 1000000;
Chiffre8 = Chiffre8 * 10000000;
Chiffre9 = Chiffre9 * 100000000;
Chiffre10 = Chiffre10 * 1000000000;
  }
NombreFinal = Chiffre1 + Chiffre2 + Chiffre3
+ Chiffre4 + Chiffre5 + Chiffre6 + Chiffre7 +
Chiffre8 + Chiffre9 + Chiffre10;
printf("Le nombre %d en base %d vaut %d
en base %d ",NombreChoisi ,BaseDebut ,
NombreFinal ,Base);
scanf("%d", &fin);
   return 0;
}
```

BIBLIOGRAPHIE ET SITOGRAPHIE

- ASSISTANCE SCOLAIRE PERSONNALISÉE, ***Lexique (nombre rationnel, nombre irrationnel)***, http://www.assistancescolaire.com/eleve/3e/maths/lexique/N-nombre-rationnel-nombre-irrationnel-mc_n05, consulté en octobre 2013.
- BARTOLUCCI A., ***La longue histoire des outils pour « dénombrer » et pour communiquer « la quantité », L'histoire des systèmes de numération,*** 2012, http://www.pratiquemath.org/spip/IMG/pdf/histoiredesnombres48.pdf
- BIANCO S, ***Arithmétique, nombres et jeux mathématiques,*** 2008, Ecole Polytechnique de Lausanne.
- BIG BROWSER, ***12/12/12-Et si on remplaçait le système décimal par un système en base 12 ?,*** http://bigbrowser.blog.lemonde.fr/2012/12/12/121212-et-si-on-remplacait-le-systeme-decimal-par-un-systeme-en-base-12/, consulté en novembre 2013.
- CAUTY, A. & HOPPAN, J.-M., ***Et un, et deux zéros mayas,*** 2005, Dossier Pour la Science: Mathématiques exotiques.
- CAUTY A., ***Taxinomie, syntaxe et économie des numérations parlées***, 1984, Institut de mathématiques, Nantes.
- DE MEY L, ***Mathématiques appliquées à l'informatique,*** dernière révision en juin 2008, disponible sur http://gilles.costantini.pagesperso-orange.fr/agreg_fichiers/BaseNum.pdf, consulté en octobre 2013.
- DE RAGO TH, ***Base de numération d'entiers. Applications ,*** http://gilles.costantini.pagesperso-orange.fr/agreg_fichiers/BaseNum.pdf, consulté en octobre 2013.
- EGYPTE ANCIENNE, ***Les fractions Egyptiennes,*** sur http://www.egypte-ancienne.fr/fractions_egyptiennes.htm, consulté en novembre 2013.
- ENCYCLOPÉDIE EN LIGNE LIBRE DE DROIT, ***Base (arithmétique)***, http://fr.wikipedia.org/wiki/Base_(arithm%C3%A9tique), consulté en octobre 2013.
- ENCYCLOPÉDIE EN LIGNE LIBRE DE DROIT, ***Nombre irrationnel***, http://fr.wikipedia.org/wiki/Nombre_irrationnel, consulté en octobre 2013.
- GONZE D., ***Les Nombres, De l'os d'Ishango au système bibi***, 2012, http://homepages.ulb.ac.be/~dgonze/MATH/NOMBRES/nombres.pdf
- IFRAH G, ***Histoire universelle des chiffres, L'intelligence des hommes racontée par les nombres et le calcul,*** 1994, Robert Laffont, Paris.
- HOPPENOT P, ***Informatique Industrielle, Numération***, 1999, IUT d'Evry Val d'Essonne
- LYCEE JANETTI, ***Codage d'un nombre,*** http://www.isn.cligniez.fr/ressources/codage_nombre.pdf, consulté en octobre 2013.
- RIGO M., ***Automates et systèmes de numération***, 2005, Université de Liège.

- POSITRON LIBRE, ***Conversion et changement de base***, http://www.positron-libre.com/cours/electronique/systeme-numeration/conversion-decimal-binaire-hexadecimal.php , consulté en octobre 2013.
- SAKAROVITCH J., ***La machine à diviser de Monsieur Pascal in Eléments de théorie des automates,*** 2003, éd. Vuibert, disponible sur http://www.infres.enst.fr/~jsaka/ETA/prologue_ext.pdf
- VAN NEERDEN T., ***Binaire et hexadécimal***, http://lehollandaisvolant.net/tuto/bin.php#bh, consulté en octobre 2013.
- VIRNIK EVOLUTION, ***The Number Base Calculator version 1.4,*** http://www.cleavebooks.co.uk/scol/calnumba.htm, 2004

ICONOGRAPHIE

Introduction

Figure 1 et 2 : Matt Groening , Guide to Mathematics and Mathematicians on The Simpsons, Compiled by Dr. Andrew Nestler, Santa Monica College, http://homepage.smc.edu/nestler_andrew/SimpsonsMath.htm

Partie I

Figure 1, 2, 5 : Gonze D., Les Nombres, De l'os d'Ishango au système bibi, 2012
Figure 3 : Ross A., Systèmes de numération, Du concret à l'abstrait, Cégep de Lévis-Lauzon.
Figure 4 : Histoire de Chiffres, http://histoiredechiffres.free.fr/numeration/sumeriens.htm
Figure 7 : De La Porte 1786
Figure 8 : http://mathworld.wolfram.com/EyeofHorusFraction.html
Figure 9: Mathematics in Egyptian Papyri, http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/Egyptian_papyri.html
Figure 10: The Greek islands specialists, http://www.greeka.com/greece-maps/ancient-greece-map.htm
Figure 11: Les géomètres de la Grèce antique de Bernard Vitrac sur http://culturemath.ens.fr/
Figure 12: http://www.encyclopedie-universelle.com/abaque-calcul3-grece.html
Figure 13: Atlas of Ancient and Classical Geography 1907 sur http://miltiade.pagesperso-orange.fr/carte-empire-romain-trajan.htm
Figure 14: Encyclopédie en ligne libre de droit, http://fr.wikipedia.org/wiki/Colis%C3%A9e
Figure 15: Encyclopédie en ligne libre de droit, http://fr.wikipedia.org/wiki/Numeration_romaine
Figure 16: Le Quatre d'Horloger, sur ORNICAR, http://www.ornicar.be/quatre-horloger/
Figure 17: © INRIA / Photo J.-M. Ramès
Figure 18: Russie-Libertés, La Tchouvachie, http://russie-libertes.org/tag/tchouvachie/
Figure 19: Encyclopédie en ligne libre de droit, http://fr.wikipedia.org/wiki/Numeraion_tchouvache
Figure 20 : http://francais.islammessage.com/Article.aspx?i=3537
Figure 21: Avatar, James Cameron © Twentieth Century Fox
Figure 23 : Textes chinois annotés, http://www.jlsigrist.com/chinois.html

Figure 24 : Charbonneau L., L'écriture des nombres naturels, http://www.math.uqam.ca
Figure 25 : Tianwei X., Conversational Mandarin On Line, http://www.csulb.edu/~txie/ccol/04/practice.htm
Figure 26 : Pourquoi vous devez utiliser un boulier et non une calculatrice ?, http://plusbelleslesmaths.com/
Figure 27 : Institut Français de l'Education, http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/ressources/documents/bouliers/bouliers/
Figure 29 : © Encyclopaedia Universalis, S.A.
Figure 30 : Mésopotamie, http://perso.numericable.fr/jlconstant/zportail/recits_de_cathy/sphere/mesopotamie.htm
Figure 31 : Zéro, Histoire du nombre, sur Math93 Une histoire des Mathématiques, http://www.math93.com/index.php/histoire-des-maths/histoire-des-nombres/157-le-zero
Figure 32 : Indo-européens, Mésopotamie (Asie mineure), http://pythacli.chez-alice.fr/civilisations/babyloniens.htm
Figure 33 : Gonze D., Les Nombres, De l'os d'Ishango au système bibi, 2012
Figure 34 : CAUTY, A. & HOPPAN, J.-M.: Et un, et deux zéros mayas 2005, Dossier Pour la Science: Mathématiques exotiques
Figure 35 : Les Amérindiens du sud : Aztèques, Mayas et Incas, http://bv.alloprof.qc.ca/histoire/
Figure 38 : El quipu: una calculadora en el Imperio Inca, http://quhist.com/quipu-imperioinca-america-precolombina/
Figure 39 : Encyclopédie en ligne libre de droit, http://fi.wikipedia.org/wiki/Machu_Picchu
Figure 40 : Haarmann H., Universalgeschichte der Schrift, http://www.indianer-welt.de/sued/inka/inka-quipu.htm
Figure 41 : Universidad Nacional de Colombia, http://www.unal.edu.co/quipu/quees.htm

Partie II

Figure 1, 2, 3 : IFRAH G, Histoire universelle des chiffres
Figure 4 : Encyclopédie en ligne libre de droit, http://en.wikipedia.org/wiki/Mu%E1%B8%A5ammad_ibn_M%C5%ABs%C4%81_al-Khw%C4%81rizm%C4%AB
Figure 5 : Roussel J, La chronique du Professeur SHADOKO, http://perso.cimetz.com/jvoyenne/shadok/devises.htm
Figure 6 : http://bricologie.free.fr/photos/analy.jpg, http://www.grimac.fr/lang-en/interrupteurs-et-commutateurs/1039-interrupteur-bipolaire-noir-01.html, http://www.mathovore.fr/defi-3eme-forum-maths-685.php, http://tpe-physique-cuisine.pagesperso-orange.fr/tpe-appareils-eclairage-incandescence.html
Figure 7 : CHENIAUX Samuel.
Figure 8 : Mémoires mortes (ROM), http://daniel.robert9.pagesperso-orange.fr/Digit/Digit_12TS2.html

Partie III

Figure 1 et 2 : Matt Groening , Guide to Mathematics and Mathematicians on The Simpsons, Compiled by Dr. Andrew Nestler, Santa Monica College, http://homepage.smc.edu/nestler_andrew/SimpsonsMath.htm
Figure 3 et 4 : Big Browser, 12/12/12 – Et si on remplaçait le système décimal par un système en base 12 ?
Figure 5 : Encyclopédie en ligne libre de droit, http://fr.wikipedia.org/wiki/Rapporteur
Figure 6 : Encyclopédie en ligne libre de droit, http://en.wikipedia.org/wiki/Blaise_Pascal