L'HISTOIRE DES NOMBRES

DE LA PREHISTOIRE A AUJOURD'HUI

La naissance de la numération est un événement lointain, très lointain, tant au niveau temporel que spatial. Nous devrions donc remonter le temps de quelques milliers d'années pour pouvoir l'observer mais également acquérir la capacité de nous dédoubler car oui, la numération est née à plusieurs endroits différents.

Tout commença avec un os...

La première preuve de l'existence d'un système de numération nous ramène en 35000 av. J.-C. A cette époque, la numération telle que nous la connaissons n'existait pas encore, celle-ci n'apparaitra en Europe qu'au Xe siècle. Néanmoins, un os découvert en Afrique sur lequel 29 encoches sont taillées nous prouve bien que les hommes possédaient déjà un système pour compter. Celui-ci va alors évoluer, comme le montre un autre os retrouvé en Moravie (République Tchèque) succédant le premier de 5000 ans où les 55 encoches ont été regroupées par 5.

Deux théories se disputent l'apparition de la numération.

La première, et celle qui compte le plus d'adeptes, est qu'il était devenu indispensable de pouvoir compter les objets qui nous entouraient. Par exemple, il était nécessaire pour un berger de chiffrer ses moutons. La deuxième concerne les cérémonies religieuses. L'ordre des participants était très important, et donc l'utilisation des nombres ordinaux était nécessaire pour le bon déroulement de ces cérémonies.

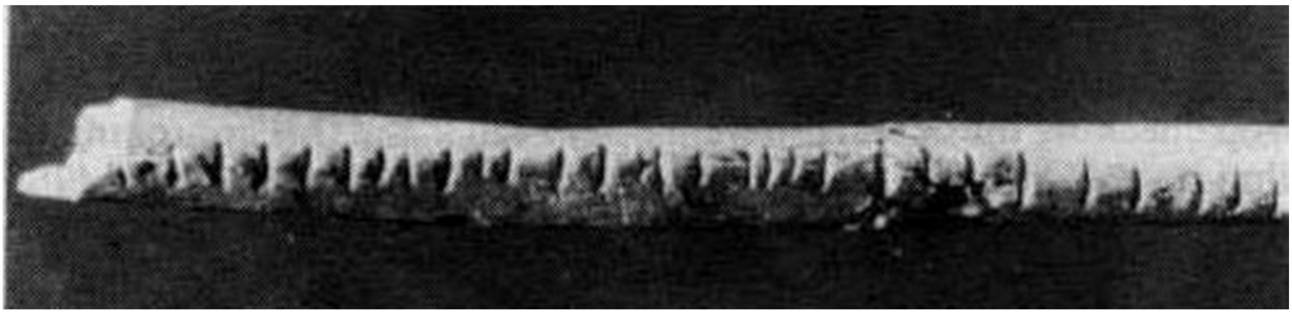


Figure I.1 : ***L'os de Lebombo***, *daté d'environ 35000 ans et marqué de 29 entailles : la plus ancienne trace "numérique" trouvée dans une grotte en Afrique du sud.*

Le berger, pour compter les têtes de son troupeau n'avait pas besoin de connaître les nombres : il se contentait de mettre un caillou dans un sac au passage de chaque bête. Cette méthode rudimentaire, dite à juste titre « du berger », fut utilisée par des paysans illettrés jusqu'à la fin du XIX^{e}. Le caillou serait donc à l'origine du calcul … Ce n'est pas surprenant quand on connaît l'étymologie du mot calcul (cailloux se disant *calculus* en latin).

L'utilisation d'entailles dans un os présentait néanmoins un avantage par rapport à la méthode du berger : nul besoin de transporter quantité de cailloux.

Cette numération figurée basée sur la correspondance un à un – une entaille ou un caillou = 1 bête - porte le nom de numération unaire.

L'homme, avec tous ses outils (cailloux, bâtonnets, doigts, etc.) se mit alors à compter et à concevoir des ensembles de plus en plus grands. Mais il rencontra vite un problème : comment représenter des nombres élevés de manière efficace ?

Il parait évident qu'on ne peut pas additionner ou multiplier indéfiniment des pierres et que, s'il fallait inventer un nom pour chaque nombre, notre mémoire serait mise à rude épreuve. C'est là que l'esprit pragmatique de l'homme intervient : il eut l'idée de regrouper les cailloux et les encoches par paquets. La notion de base fit graduellement son apparition. Et bien que la base 10, que nous employons aujourd'hui fut depuis l'aube de la numération la plus répandue, certains peuples utilisèrent d'autres bases pour compter.

Figure I.2 : *Bois de renne entaillé datant du Paléolithique (15 000 ans av. J.-C.)*

Avec le développement des sociétés, de la communication, de l'artisanat et du commerce, l'homme fut confronté à de nouveaux besoins. Il ne s'agissait plus seulement de représenter visuellement les quantités, il fallait également garder durablement le souvenir des dénombrements : l'apparition de l'économie obligea à la mémorisation des comptes.

C'est en Mésopotamie, une région du Croissant fertile (l'Irak actuel et une partie de la Turquie, de la Syrie, du Soudan …) qu'apparaît une forme plus évoluée de numération.

Et qu'en est-il de l'origine des mathématiques ?

Certains pensent que les débuts des mathématiques sont apparus en Egypte. En effet, les Égyptiens auraient inventé la géométrie pour faciliter la redistribution des parcelles après la crue annuelle du Nil. Une autre théorie dit qu'elles nous viennent des prêtres qui les pratiquaient et les développaient de manière totalement désintéressée pour occuper leurs journées peu productives.

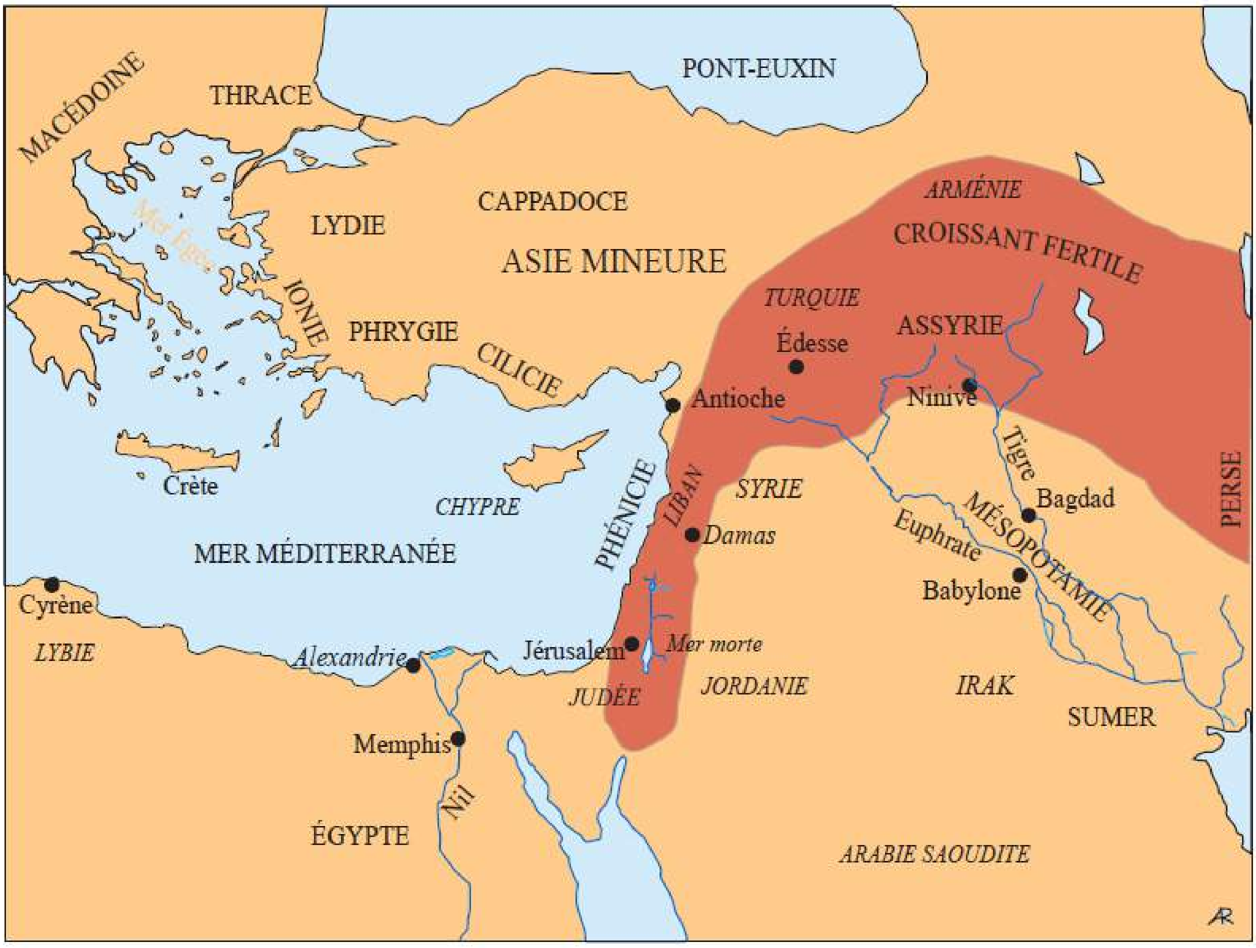


Figure I.3 : *Carte du proche Orient, le Croissant fertile (noms actuels en italique)*

En 8000 av. J.-C., pour laisser une trace de leurs différentes transactions, les Sumériens attribuèrent différentes valeurs à de petits jetons en argile, appelés calculi, dont la valeur dépendait de leur taille et de leur forme : le petit cône  pour l'unité, la bille  pour la dizaine, le grand cône  pour la soixantaine, le grand cône perforé  pour dix soixantaines ...

Ces jetons d'argiles que l'on pourrait apparenter à nos actuelles pièces de monnaie, étaient glissés dans une sphère creuse en argile marquée par des sceaux qui en garantissaient l'origine et l'intégralité. Ainsi, par exemple, si la bulle de terre contenait le dénombrement d'un troupeau confié à un berger, lorsque celui-ci le ramenait, il leur suffisait de briser la bulle-enveloppe pour vérifier qu'aucune bête ne manquait.

Figure I.4 : *Calculi de Mésopotamie*

Le fait de briser l'enveloppe présentait néanmoins un inconvénient: ce système était incapable de garder traces d'opérations effectuées sur ces quantités.
Petit à petit, l'homme commença à noter le contenu de la bulle d'argile sur le dessus de celle-ci, afin de réaliser des contrôles intermédiaires sans avoir à la casser : les petits calculi devinrent inutiles et les bulles-enveloppes se transformèrent en tablettes.
Ainsi, c'est une invention majeure qui permit une nouvelle avancée dans l'histoire de la numération : l'apparition de l'écriture. Après tout, l'écriture ne fut-elle pas inventée pour satisfaire des besoins comptables ? Sur ces tablettes comptables, l'écriture des chiffres était encore très rudimentaire : à l'aide d'un calame, tige de roseau biseautée, on marquait une empreinte dans l'argile en forme de coin (du latin *cuneus*, d'où l'appellation écriture cunéiforme), dont la profondeur et l'orientation déterminaient la valeur représentée. Petit à petit, cette écriture cunéiforme évolua pour donner naissance au système de numération babylonien que nous décrivons en page 29**.**

Figure I.5 : *Tablette de comptes à écriture pictographique*

De la numération préhistorique à la numération arabe, il n'y a pas qu'un pas !

Des milliers d'années séparent les os préhistoriques de nos nombres arabes. Et durant tout ce temps, le monde a vu naitre et évoluer de nombreux systèmes de numération, visant toujours l'efficacité et donc la simplicité. Ces systèmes peuvent être classés en trois groupes : les systèmes additifs, hybrides et positionnels que nous vous présentons ci-après.

I. LE SYSTÈME DE NUMERATION ADDITIONNEL

Le système de numération additionnel est le tout premier type de système utilisé. Il fonctionnait selon une addition d'un même symbole représentant une unité, une dizaine, une centaine, etc. Pour illustrer cette façon additive de dénombrer dans ce dossier, nous allons traiter les systèmes historiques égyptien, grec, romain, tchouvache et arménien. Nous présenterons également le système navi, qui n'a jamais vu le jour sur cette terre puisqu'il est sorti de l'imagination du réalisateur James Cameron.

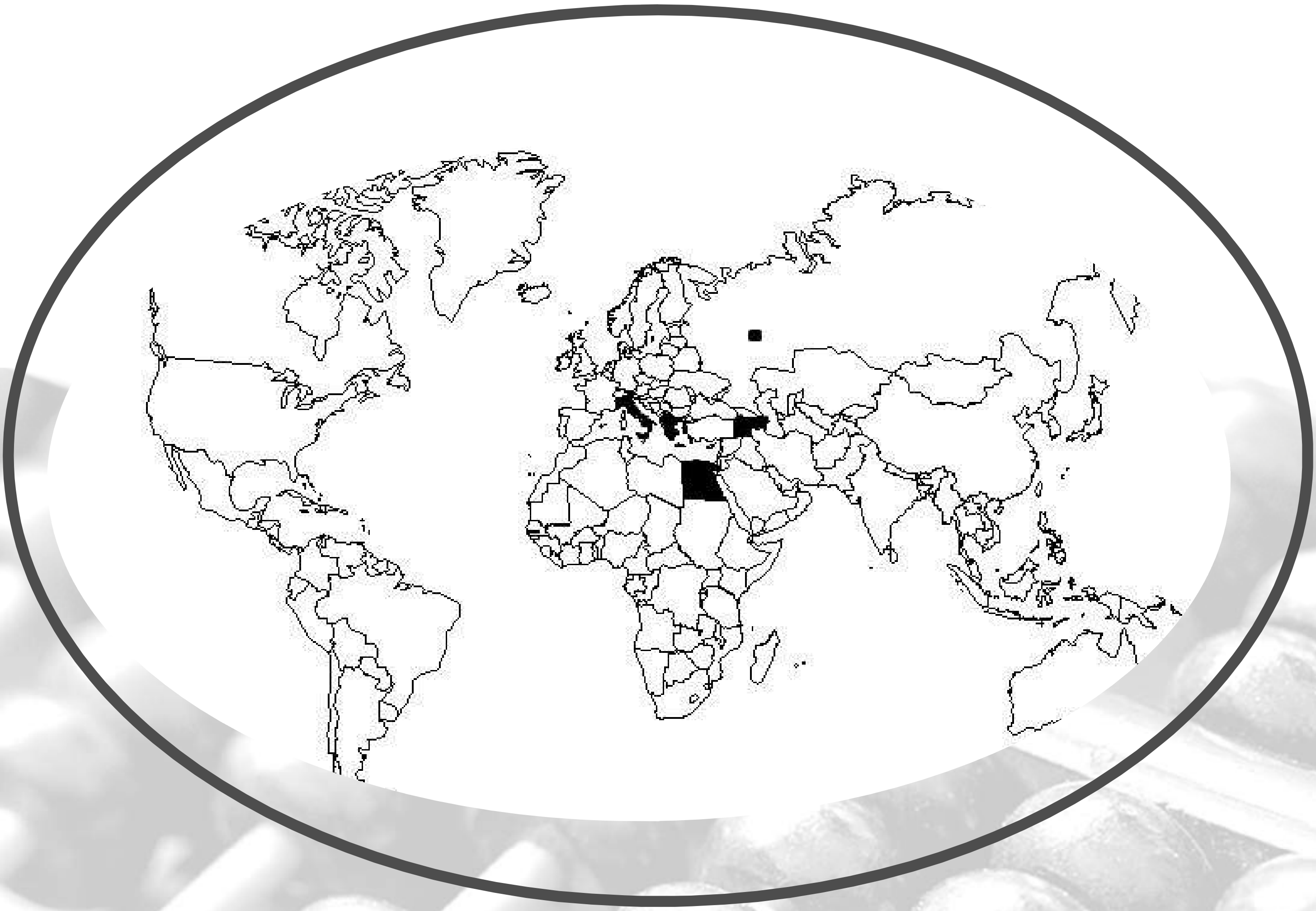


Figure I.6 : *Carte du monde*

Le système de numération égyptien

Dans l'Egypte ancienne, la notation des chiffres était basée, comme l'écriture, sur les hiéroglyphes. Les hiéroglyphes représentaient en général des objets, comme des plantes, des animaux ou des dieux. Les Egyptiens utilisaient un système de numération additif de base 10. Celui-ci est apparu en 3000 avant Jésus Christ. Chaque puissance successive de 10 était représentée par un signe particulier (cfr. tableau 1).

Figure I.7 : *Carte de l'Egypte antique, le delta du Nil, De La Porte* ***1786***

Ce système ne possédait pas de symbole pour représenter le zéro car celui-ci n'était pas utile. Les symboles pouvaient être répétés jusqu'à 9 fois, puisque les Egyptiens travaillaient en base 10, et étaient regroupés par grandeur.

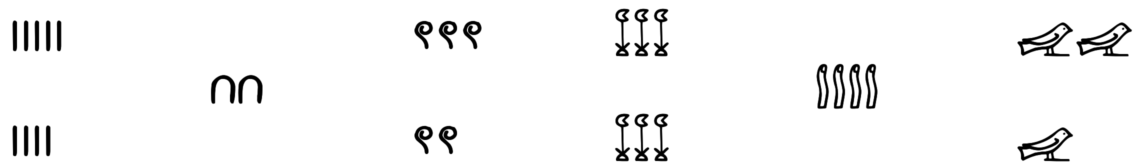
Tableau 1 : *Conversion des hiéroglyphes*

Valeur	Signe hiéroglyphique	
1	𓏺	Le bâton
10	𓎆	L'anse de panier
100	𓍢	Le rouleau de papyrus
1000	𓆼	La fleur de lotus
10 000	𓂭	Le doigt levé vers le ciel
100 000	𓆐	Le têtard, sans doute du fait du nombre élevé de ceux-ci au bord du Nil
1000 000	𓁨	Dieu agenouillé soutenant le monde entier

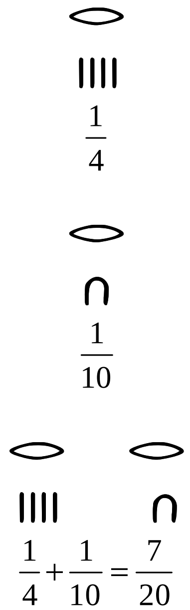
Le système était additionnel : on répétait chaque signe autant de fois que nécessaire. Pour représenter les nombres, on écrivait le symbole désignant 1 autant de fois que le nombre comportait d'unités et le symbole mis pour 10 autant de fois que le nombre comportait de dizaines, etc. Par exemple, voici la représentation du nombre *2014* :

L'avantage de cette notation est la facilité de lecture. Mais l'inconvénient majeur apparaît lorsqu'il s'agit de représenter des nombres nécessitant une répétition élevée des symboles comme 999 par exemple. Il faut 27 symboles dans le système égyptien alors qu'il n'en faut que 3 dans notre système de numération de position décimal.

On remarque que les Egyptiens écrivaient de droite à gauche. Voici un nombre beaucoup plus grand :



Les chiffres ci-dessus doivent être lus à la fois verticalement et horizontalement. Nous obtenons donc le nombre 346 529.



Les égyptiens connaissaient et utilisaient également des symboles pour représenter les fractions. Mais ils n'employaient que des fractions dont le numérateur était égal à l'unité. Ils représentaient ce numérateur *1* par le symbole représentant une bouche ouverte. Il y avait donc des signes pour désigner la demi, le tiers, le quart, … D'autres fractions pouvaient être obtenues par addition des fractions unitaires.

La légende raconte que le dieu Seth arracha l'œil d'Horus lors du combat qui les opposait. Et le découpa en morceaux, ce fut le Dieu Thot qui le reconstitua. Donc, chacune des parties de l'œil d'Horus éclaté symbolise les fractions égyptiennes.

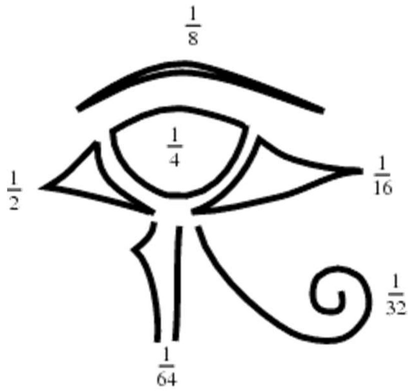


Figure I.8 :*Statue d'Horus à l'entrée du temple qui lui est dédié à Edfou (à gauche) et l'œil sacré Oudjat représentant les six fractions de l'œil d'Horus.*

Au-delà de la capacité de compter

Les Egyptiens possédaient déjà d'importantes connaissances en géométrie. Ils pouvaient mesurer le volume de leurs pyramides, de même que celui des cylindres et des parallélépipèdes rectangles. Ils étaient également capables de calculer l'aire de nombreuses formes. De plus, ils possédaient une bonne approximation du nombre pi grâce au scribe Ahmès qui l'estimait comme le carré de 16/9.

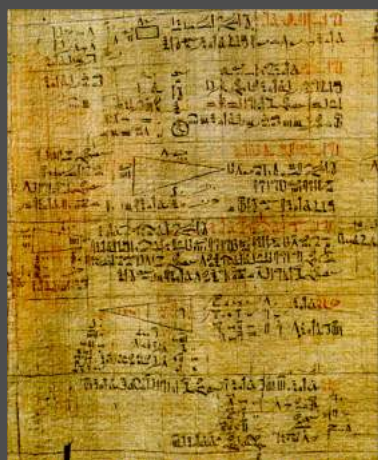



Figure I.9 : *Papyrus de Rhind découvert à Thèbes et écrit vers 1650 AV. J.-C. par le scribe Ahmès.*

Le système de numération grec

Les Grecs anciens ont connu plusieurs manières de représenter les nombres dont deux plus importantes. La première, la numération attique (celle d'Athènes) apparaît à partir du Vè siècle av. J.-C. tandis que la deuxième, la numération ionique n'a été introduite à Athènes qu'en 403 av. J.-C. mais est bien plus ancienne car on en a retrouvé des traces qui remontent à 700 av. J.-C. à Milet. Bien sûr, ces deux systèmes ne sont pas les seuls employés par les Grecs car ils variaient selon les régions mais il s'agit des plus populaires.

Figure I.10 : *Le monde grec ancien*

Le système attique ou acrophonique

Il s'agit d'un système de numération de base 10 qui contient 10 symboles. Il repose sur le principe d'addition, ce qui signifie que les chiffres placés les uns à côté des autres doivent être additionnés pour former le nombre. Ce système est très semblable au système de numération romain à une exception près : il est uniquement additif. Ainsi, le nombre quatre s'écrira IIII, et non IΠ.

On peut également qualifier ce système d'acrophonique du fait que chaque symbole (excepté la barre du 1) représente l'initiale du nom du nombre. Ce système, qu'on ne retrouve chez aucun des peuples avec lesquels les Grecs anciens étaient en contact, présente un grand avantage mnémotechnique.

Tableau 2 : *Chiffres du système attique*

Valeur	Signe	Chiffre grec	Prononciation	Dérivés étymologiques
1	I	–	–	-
5	Π	πέντε	pente	pentagramme
10	Δ	δέκα	deka	décathlon
100	H	ἑκατόν	hekaton	hécatombe
1000	X	χίλιοι	chiolioi	kilo
10000	M	μύριον	murion	myriade

Les Grecs ont ensuite assemblé ces symboles de base afin de créer plus de possibilités. C'est ainsi que les signes représentant 50, 500 et 5 000 sont des composés de la lettre pi, dans sa forme ancienne (avec une jambe droite plus courte) et d'un autre symbole qui s'apparente à une puissance de 10.

Tableau 3 : *Chiffres du système attique*

Ι	Γ	Δ	𐅄	Η	𐅅	Χ	𐅆	Μ	𐅇
1	5	10	50	100	500	1 000	5 000	10 000	50 000

PETIT EXEMPLE

Χ𐅅ΗΗΗΗ𐅄ΔΔΙΙΙΙ → 1X1000 + 1X500 + 4X100 + 1X50 + 2X10 + 4X1 = 1974

PETITE REMARQUE

Il n'y a pas vraiment d'ordre établi mais pour faciliter la lecture, les anciens Grecs avaient l'habitude d'écrire dans l'ordre décroissant de gauche à droite.

Figure I.11 : *Mosaïque représentant Archimède effectuant des opérations arithmétiques sur un abaque, au moment où un soldat romain s'apprête à l'assassiner. III^e s. av. J.-C.*

Le système ionique ou alphabétique

Le système ionique fut le deuxième plus utilisé par les Grecs anciens. Comme son nom l'indique, il fait correspondre les lettres de l'alphabet grec aux chiffres en gardant leur ordre logique. Il attribue donc aux neufs premières lettres les unités (1-9), aux neufs suivantes les dizaines (10-90) et aux neufs dernières les centaines (100-900).

Tableau 4 : *Chiffres du système ionique*

Unités		Dizaines		Centaines	
1	**Α** *alpha*	10	**Ι** *iota*	100	**Ρ** *rhô*
2	**Β** *bêta*	20	**Κ** *kappa*	200	**Σ** *sigma*
3	**Γ** *gamma*	30	**Λ** *lambda*	300	**Τ** *tau*
4	**Δ** *delta*	40	**Μ** *mu*	400	**Υ** *upsilon*
5	**Ε** *epsilon*	50	**Ν** *nu*	500	**Φ** *phi*
6	**F** *digamma*	60	**Ξ** *xi*	600	**Χ** *chi*
7	**Ζ** *zêta*	70	**Ο** *omicron*	700	**Ψ** *psi*
8	**Η** *êta*	80	**Π** *pi*	800	**Ω** *oméga*
9	**Θ** *thêta*	90	**ϟ** *koppa*	900	**ϡ** *sampi*

Il faut remarquer que l'alphabet grec traditionnel ne contenait que 24 lettres et le système en nécessitait 27. Pour résoudre ce problème, les Grecs anciens sont allés rechercher dans des alphabets archaïques les lettres *digamma* (6) et *koppa* (90), elles sont d'ailleurs à leur place naturelle au milieu de la série. Il en va différemment pour *sampi* (900), qui a été empruntée à l'alphabet phénicien, probablement pour le seul besoin de la numération. Sa position en fin de la liste conforte cette hypothèse.

Bien sûr, le nombre maximal que l'on pouvait écrire avec cette notation était 999, autant dire pas grand-chose. Les Grecs anciens ont donc cherché une solution pour pouvoir écrire des nombres plus élevés.

Pour les milliers, nous reprenons les lettres utilisées pour les unités en leur rajoutant une sorte d'apostrophe devant le chiffre. Avec les dizaines de milliers il faut revenir au système acrophonique en reprenant la lettre M laquelle est surmontée d'une lettre miniature : le nombre de myriades.

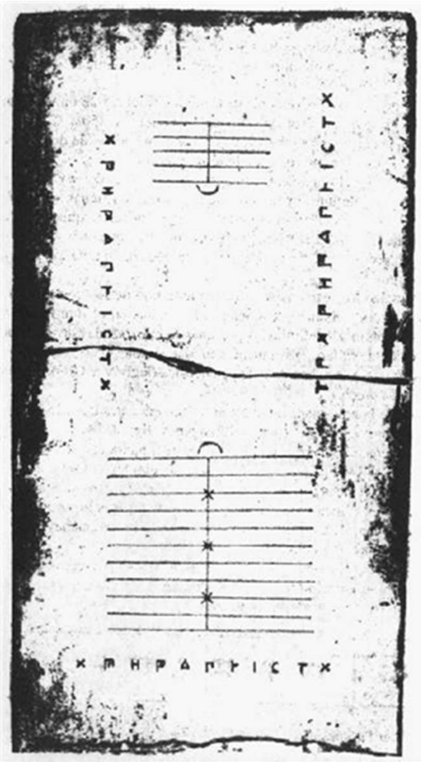


Figure I.12 : *Table de Salamine, Ve ou IVe s. av. J.-C. Ce document, d'abord interprété comme une table de jeu est en fait un instrument de calcul.*

Tableau 5 : *Chiffres du système ionique*

Milliers		Dizaines de mille	
1 000	ÀA	10 000	$\overset{A}{M}$ (ou MU)
2 000	ÀB	20 000	$\overset{B}{M}$
3 000	ÀG	30 000	$\overset{\Gamma}{M}$
4 000	ÀD	40 000	$\overset{\Delta}{M}$
5 000	ÀE	50 000	$\overset{E}{M}$
6 000	À,	60 000	$\overset{ϛ}{M}$
7 000	ÀZ	70 000	$\overset{Z}{M}$
8 000	ÀH	80 000	$\overset{H}{M}$
9 000	ÀQ	90 000	$\overset{\Theta}{M}$

PETIT EXEMPLE

ÀA ϡ Ο Δ → 1X1000 + 1X900 + 1X70 + 1X4 = 1974

Le système de numération romain

Durant l'Antiquité, environ 500 ans avant notre ère, les Romains utilisaient un système de numération de type additif de base 10. Cette écriture a subsisté jusqu'au Moyen-âge, avec néanmoins quelques variantes. Avec l'extension romaine, ce système fut utilisé dans une grande partie de l'Europe. Son influence fut telle qu'aujourd'hui encore, il nous arrive de l'employer dans la pagination et dans les cadrans d'horloge.

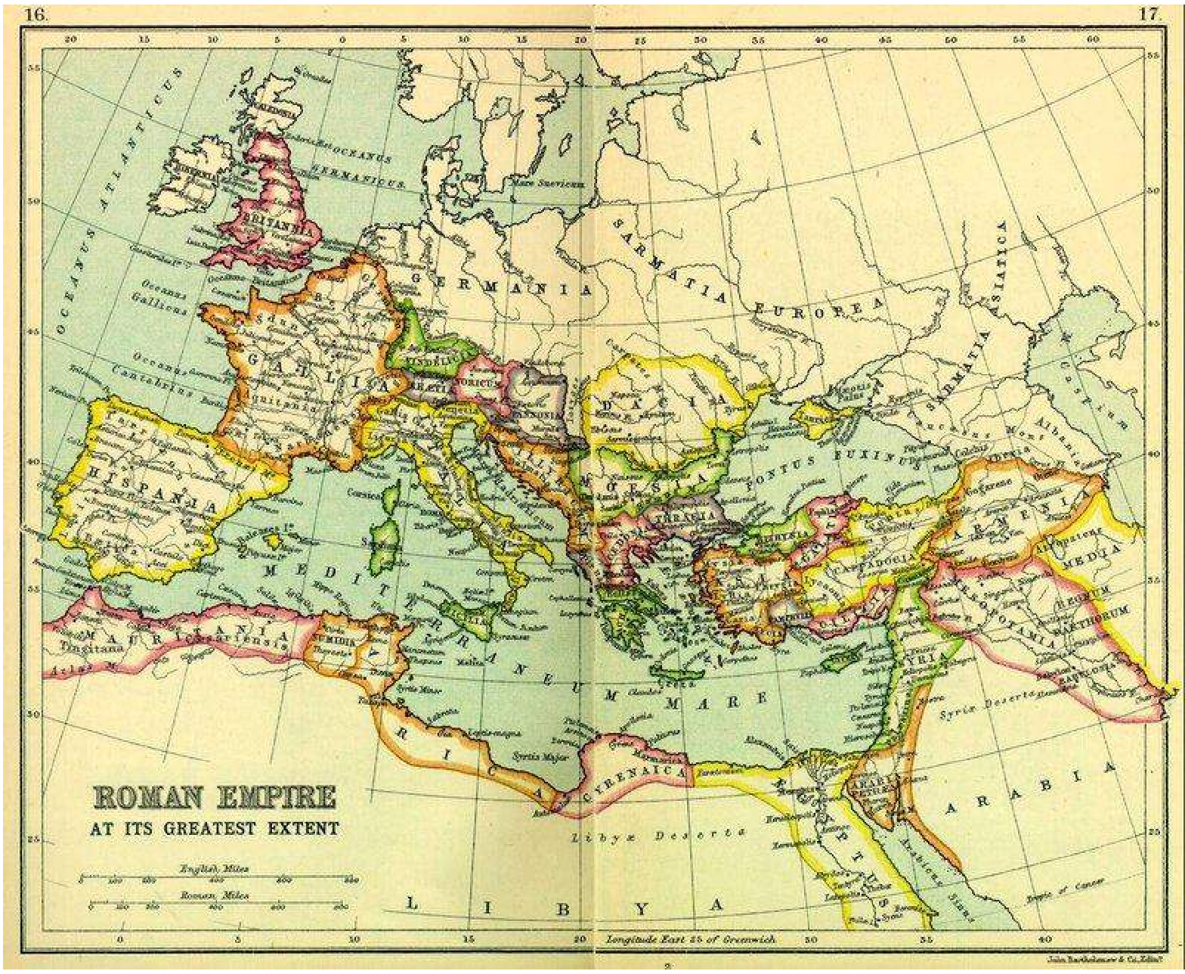


Figure I.13 : *Europe, Empire Romain*

Tableau 6 : *Chiffres du système romain*

Chiffres romains	I	V	X	L	C	D	M
Valeur	1	5	10	50	100	500	1000

Les Romains disposaient donc de sept symboles pour former leurs nombres. Ils ne considéraient pas le zéro comme un chiffre, c'est pourquoi ils ne le représentaient pas.

Tableau 7 :
Chiffres du système romain

Unités		Dizaines	
1	I	10	X
2	II	20	XX
3	III	30	XXX
4	IV	40	XL
5	V	50	L
6	VI	60	LX
7	VII	70	LXX
8	VIII	80	LXXX
9	IV	90	XC

Un symbole ne peut pas être répété plus de trois fois, sauf le « M » qui, pour représenter le nombre 4000, est écrit quatre fois. C'est pourquoi le chiffre 4 est symbolisé par un « I » précédant un « V » car il équivaut à « 5 moins 1 ». Ce principe est également appliqué pour le chiffre 9, les nombres 40, 90, etc. Voici le nombre 4 724 en numération romaine :

MMMMDCCXXIV

La plus grande quantité représentée par un symbole existant dans ce système étant mille, le plus grand nombre codable était 4999. Les Romains se tirèrent d'embarras en surmontant d'une barre les chiffres pour les multiplier par mille et de deux barres pour les multiplier par un million.

$\overline{XXV}$ =25 000 et $\overline{\overline{C}}$ = 100 000 000.

En pratiquant simultanément les principes additifs et soustractifs, les Romains ont considérablement compliqué la pratique de la numération.

Figure I.14 : *L'entrée LII (52) du Colisée. On peut encore apercevoir les chiffres romains gravés sur l'arche.*

Au Moyen-âge rien ne va plus !

Au Moyen-âge, l'écriture des nombres fut quelque peu simplifiée. Par exemple, quatre ne s'écrivit plus « IV », mais « IIII », qu'on appela « quatre d'horloger » car il fut utilisé dans l'horlogerie pour faciliter la lisibilité.

Figure I.16 : *Horloge d'un clocher à Bruxelles*

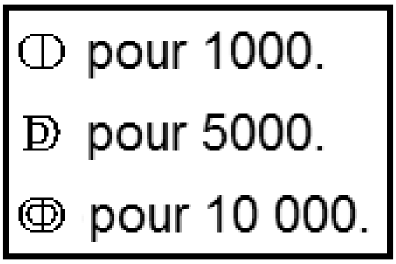


Figure I.15 : *Chiffres romains étendus.*

Une autre particularité était qu'on représentait le nombre quatre-vingt comme ceci « IIII^{xx} », ce qui pourrait expliquer l'origine de ce mot. Le nombre trois-cents pouvait aussi être écrit de plusieurs manières : CCC ou XV^{XX} ou III^{C}.

PETITE REMARQUE

Tout comme le système de numération grec, le système romain n'offre pas beaucoup de possibilités opératoires. Les chiffres romains et grecs sont difficilement utilisables dans une opération écrite telle que l'addition. Il était donc très compliqué de pratiquer des opérations avec un tel système. Les Romains ont imaginé un boulier sous forme d'abaque pour pratiquer leurs calculs. Cela restait néanmoins très laborieux.

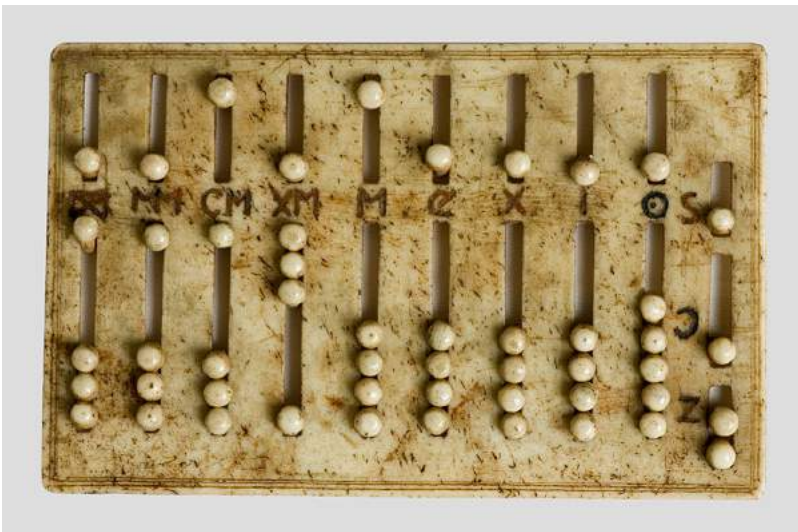


Figure I.17 : *Boulier romain*

Le système de numération tchouvache

La numération tchouvache est un ancien système de numération additif utilisé en Russie (et notamment en Tchouvachie). Ce sont les peuples turcs de Tchouvachie qui ont inventé cette numération. Les nombres tchouvaches ont été utilisés jusqu'au début du XXe siècle.

Figure I.18 : *La Tchouvachie est une république de la Fédération de Russie située sur la rive gauche de la Volga.*

Comme dans la numération romaine, un symbole ne peut pas être utilisé plus de quatre fois. Au-delà de quatre symboles à la suite, on change le trait donc on change le symbole.

La numération tchouvache ressemble beaucoup à la numération romaine mais contrairement à celle-ci, les chiffres de plus hautes valeurs sont placés à droite.

Figure I.19 : *Symboles tchouvaches.*

PETIT EXEMPLE

IIII/×××✳✳ → 19 + 20 + 2000 = 2039

Le système de numération arménien

Certains systèmes de numération additifs se sont développés grâce à une invention importante : l'alphabet.

C'est le cas du système de numération arménien, né en Ancienne Arménie au début du Vᵉ siècle de notre ère et qui utilisait à l'origine l'alphabet de l'époque. Cet alphabet comptait 32 consonnes et 6 voyelles.

La numération arménienne utilise les 9 premières lettres de l'alphabet pour les unités, les 9 consécutives pour les centaines et les 9 subséquentes pour les milliers.

Figure I.20 : *L'Arménie, entre la Turquie, l'ex-URSS et le plateau iranien.*

Tableau 8 : *Chiffres du système arménien*

Lettre arménienne	Valeurs Num.	Phon.	Lettre arménienne	Valeurs Num.	Phon.	Lettre arménienne	Valeurs Num.	Phon.
Ա	1	a	Խ	40	kh	Չ	700	tch
Բ	2	b	Ծ	50	ts	Պ	800	p
Գ	3	g	Կ	60	k	Ջ	900	dj
Դ	4	d	Հ	70	h	Ռ	1000	rr
Ե	5	ye/e	Ձ	80	dz	Ս	2000	s
Զ	6	z	Ղ	90	gh	Վ	3000	v
Է	7	é	Ճ	100	tch	Տ	4000	t
Ը	8	e	Մ	200	m	Ր	5000	r
Թ	9	t/th	Յ	300	y/h	Ց	6000	ts
Ժ	10	j	Ն	400	n	Ւ	7000	iu
Ի	20	i	Շ	500	ch	Փ	8000	p
Լ	30	l	Ո	600	o	Ք	9000	k

Les chiffres sont écrits de gauche à droite. L'ordre des chiffres n'a pas d'importance. Cependant la convention ordonne d'écrire les chiffres par ordre décroissant.

Comme dans le système romain, pour écrire les nombres plus grand que 9999, il faut tracer une ligne au-dessus d'un symbole, signifiant que sa valeur a été multipliée par 10 000.

PETIT EXEMPLE

$\overline{\text{Ճ Ժ Դ}}$ → (100+10+4) x 10 000 =1 140 000

Le système de numération navi

Il existe pléthores de systèmes de numération. En voici un tout à fait fictif, inventé par le linguiste Paul Frommer pour les besoins du film « *Avatar* » de James Cameron. Les Na'vis, peuple de la planète Pandora, ne possèdent que quatre doigts et comptent selon un système additif octal, c'est-à-dire de base 8.

C'est une numération orale, il n'y a pas de retranscription écrite. Il n'existe donc pas de symboles écrits.

Figure I.21 : *Illustration du film « Avatar» de James Cameron*

Tableau 9 : *Chiffres du système Na'vi*

	0 (0+x)	1 (8+x)	2 (16+x)	3 (24+x)	4 (32+ x)	5 (40+x)	6 (48+x)	7 (56+x)
0		vol	mevol	Pxevol	tsivol	mrrvol	puvol	kivol
1	**aw**	volaw	mevolaw	pxevolaw	tsivolaw	mrrvolaw	puvolaw	kivolaw
2	**mune**	vomun	mevomun	pxevomun	tsivomun	mrrvomun	puvomun	kivomun
3	**pxey**	vopey	mevopey	pxevopey	tsivopey	mrrvopey	puvopey	kivopey
4	**tsing**	vosing	mevosing	pxevosing	tsivosing	mrrvosing	puvosing	kivosing
5	**mrr**	vomrr	mevomrr	pxevomrr	tsivomrr	mrrvomrr	puvomrr	kivomrr
6	**pukap**	vofu	mevofu	Pxevofu	tsivofu	mrrvofu	puvofu	kivofu
7	**kinä**	vohin	mevohin	pxevohin	tsivohin	mrrvohin	puvohin	kivohin

Ce tableau montre la formation des chiffres de 1 à 63. Il y a 7 chiffres de base (en gras), auxquels il faut ajouter vol ou vo (souligné), ce qui veut dire 8, pour la huitaine accomplie, ainsi qu'un des 7 chiffres des unités. Les huitaines sont formées en préfixant le chiffre huit par la racine du chiffre multiplicateur, à l'exception de huit lui-même. De 1 à 8, on prononce le chiffre symbolisant la quantité, les nombres composés sont formés en suffixant la huitaine avec la seconde racine du chiffre de l'unité (les chiffres Na'vi ont deux racines : une pour les unités composées, l'autre pour les unités multiplicatrices).

Les 8^2-aines se forment de la même façon que les huitaines, c'est-à-dire en préfixant le mot pour 64 (*zam*). Il en va de même pour les 8^3-aines (préfixe *Vozam*) et 8^4-aines (préfixe *zazam*).

Tableau 10 : Autres préfixes

zam	$64=8^2$
vozam	$512=8^3$
zazam	$4096=8^4$

On peut faire précéder les nombres de « *me* », « *pxe* », « *tsi* », « *mrr* », « *pu* », et « *ki* » pour indiquer le nombre de 64-aines, 512-aines, 4096-aines, l'absence de ces propositions signifiant qu'elles ne sont comptées qu'une fois.

II. LE SYSTÈME DE NUMERATION HYBRIDE

Le système de numération hybride est un système intermédiaire entre le système additif et le système positionnel. Ce système fonctionnait en combinant une série de multiplications et d'additions. En effet, les nombres étaient représentés comme une addition de multiples de puissances de la base. Dès lors, il existait dans ce type de système un certain nombre de symboles représentant les chiffres et d'autres symboles représentant les puissances de la base utilisée. Ce système fut surtout employé en Asie, à partir de la seconde moitié du deuxième millénaire avant Jésus-Christ.

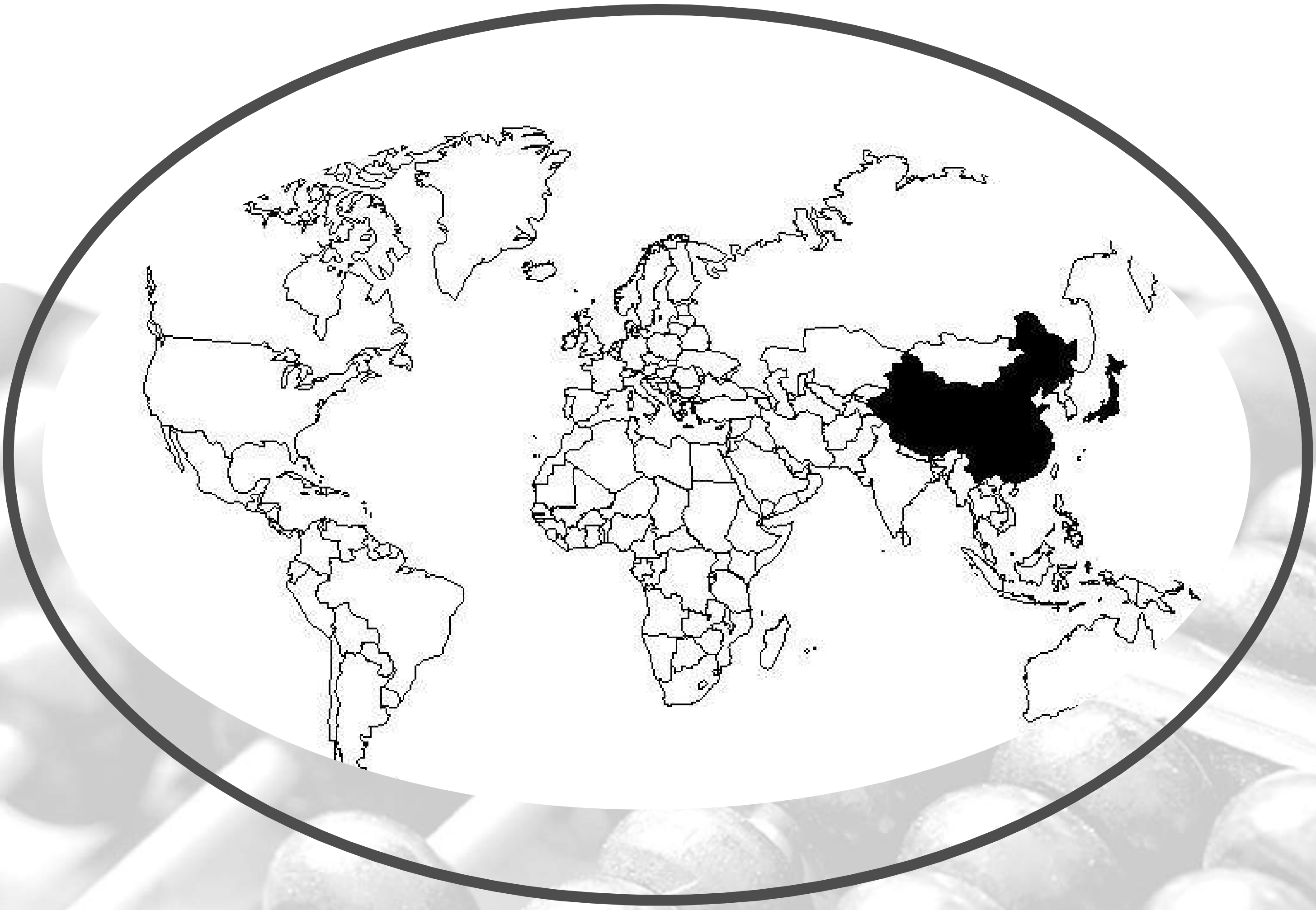


Figure I.22 : *Le monde*

Les systèmes de numération chinois et japonais

Tout d'abord, avant de commencer les points plus techniques de ces systèmes de numération, il est important de noter que ceux-ci étaient extrêmement proches d'un point de vue fonctionnel et ne différaient que dans l'utilisation des symboles représentant les chiffres. Dès lors, on peut parler de système de numération sino-japonais car « sino » réfère à la Chine et que « japonais », comme il est indiqué, réfère au Japon. Nous avons retrouvé des traces de ce système, qui date de la seconde moitié du deuxième millénaire avant l'ère chrétienne, sur des écailles de tortues et sur des os.

Ce système est composé de neuf symboles représentant les chiffres de 1 à 10 et, à l'origine, de 3 symboles représentant les puissances de la base qui est, ici, la base 10.

Tout d'abord...

0	零	*ling*
1	一	*i*
2	二	Erh
3	三	San
4	四	Ssu
5	五	Wu
6	六	Liu
7	七	Chhi
8	八	Pa
9	九	Chiu
10	十	Shih
100	百	Pai
1000	千	Chhien
10000	万	wan

Figure I.23 : *Les chiffres chinois.*

La forme des chiffres chinois ressemblait à celle utilisée aujourd'hui.

La numération sino-japonaise est hybride : les nombres sont écrits de bas en haut, en notant chaque partie du nombre comme une multiplication d'une puissance de dix, la base, par un coefficient.

Pour former le nombre en entier, il faut additionner le tout. Le zéro n'est pas nécessaire car, si un rang manque, il suffit de ne rien indiquer.

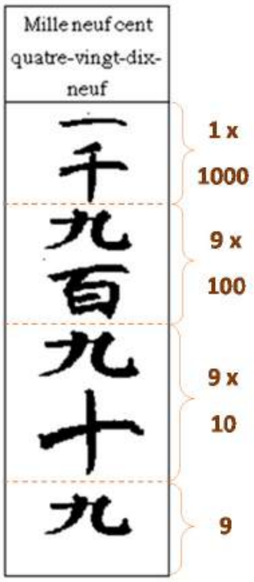


Figure I.24 :
Le nombre 1999 en chinois.

(1x1000) + (9x100) + (9x10) + (9x1) = 1999

Dès lors, nous remarquons que le nombre est représenté dans un système hybride car pour le construire, nous avons dû utiliser la multiplication et l'addition.

Ensuite...

Malgré ce système qui était en application, un autre était utilisé au même moment. Ce deuxième système était en tout point identique au niveau fonctionnel mais différait par les chiffres utilisés. En effet, les symboles employés précédemment avaient un gros avantage, c'est qu'ils étaient simples à écrire mais dès lors, ils étaient facilement modifiables en d'autres chiffres, ce qui était extrêmement dommageable pour la rédaction de documents officiels tels que les livres de comptes et les recensements. C'est pour cette raison qu'un système financier fut créé, dont les symboles sont représentés à la figure I.25.

壹	yī	un
贰	èr	deux
叁	sān	trois
肆	sì	quatre
伍	wǔ	cinq
陆	liù	six
柒	qī	sept
捌	bā	huit
玖	jiǔ	neuf
拾	shí	dix
零	líng	zéro

Figure I.25 : *Chiffres chinois dans l'économie*

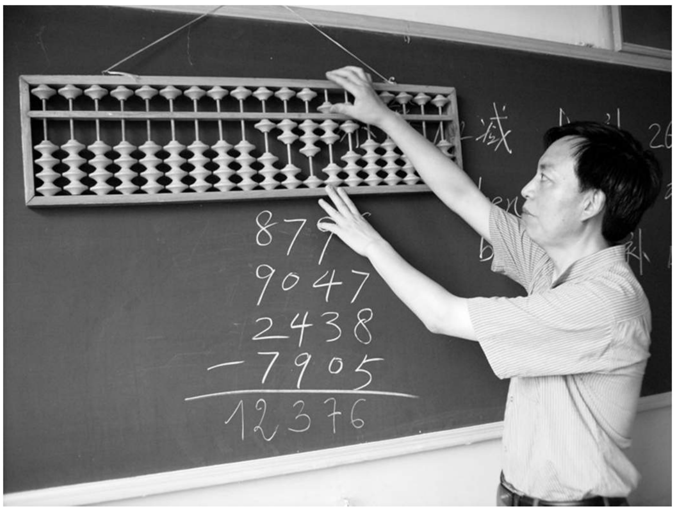
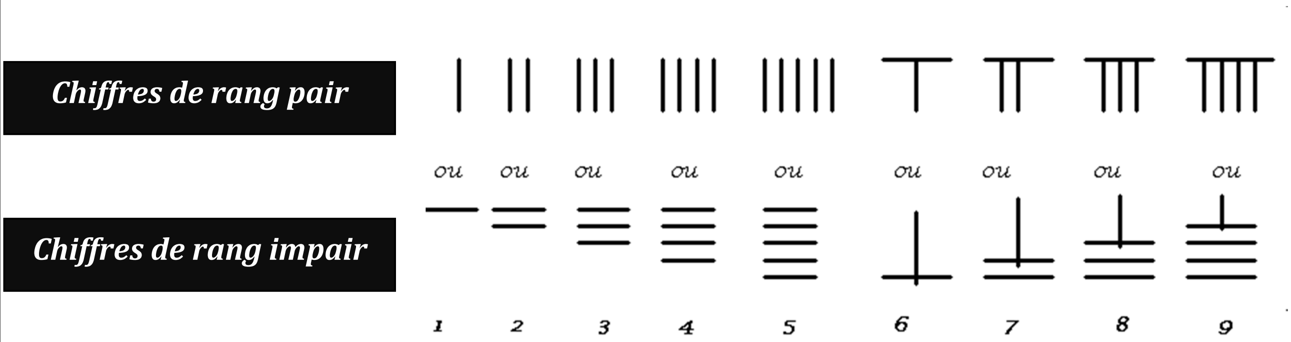


Figure I.26 : *Professeur chinois utilisant un boulier*

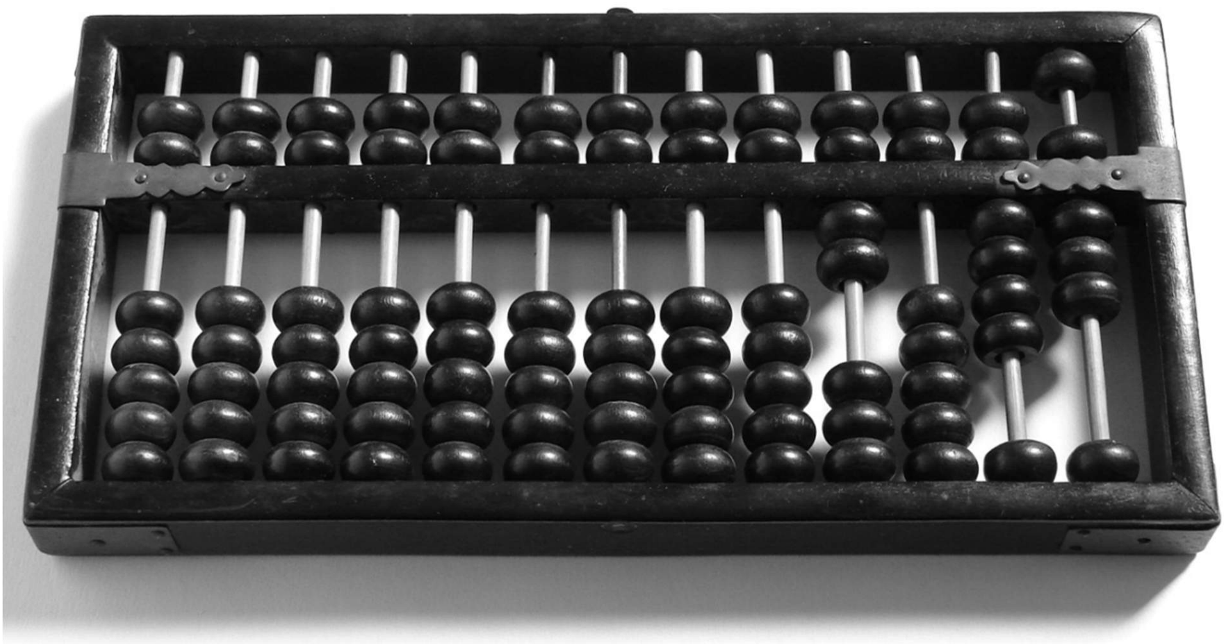
Dans leur histoire, durant plusieurs siècles, les savants chinois ont aussi employé la numération de position à base 10 : la numération à bâtons (*suànchóu*) qui remonte au Ier siècle av. J.-C. et qui est originaire de la civilisation chinoise antique. La numération à bâtons utilise deux séries de chiffres selon le rang



Le zéro est représenté par un espace vide ce qui aurait pu représenter un risque d'erreur s'il n'y avait alternance des séries.

En raison de son usage très approprié au calcul, beaucoup de mathématiciens chinois de l'époque adoptèrent cette numération pour leurs travaux. En pratique, ces "bâtons" étaient disposés sur un échiquier appelé "suanpan" (littéralement "plateau à baguettes"), qui, par la suite, a pris la forme de boulier (abaque).

Figure I.27 : *Boulier Chinois : les chinois utilisaient un boulier basé sur leur numération à bâtons. Dans la partie du haut, une boule vers le bas indique "5", tandis que dans la partie du bas, une boule vers le haut indique "1".*



III. LE SYSTÈME DE NUMERATION POSITIONNEL

Le système de numération positionnel apparait au XXVIIIè siècle av. J.-C. en Mésopotamie. Il s'est ensuite développé dans de nombreux pays jusqu'à aboutir au système arabe que nous connaissons aujourd'hui. Ce système fonctionne en attribuant certaines valeurs aux chiffres en fonction de leur position dans le nombre. Pour illustrer ce système positionnel, nous allons traiter des systèmes babylonien, maya et arabe.

Figure I.28 : *Le monde*

Le système de numération babylonien

Babylone était une cité qui fut florissante du début du IIe millénaire av. J.-C. jusqu'en 539 av. J.-C. Elle se situait en Mésopotamie, d'où le fait que la numération babylonienne soit aussi appelée la numération mésopotamienne. Cette civilisation fut précédée par les civilisations Akkadienne et Sumérienne, celles à l'origine des calculi dont nous parlons en page 5. Les Babyloniens ont vaincu les Sumériens aux alentours de 1900 av. J.-C. et ont donc établi leur capitale, en hommage à leur nom.

De nos jours, ce territoire fait partie de l'Irak.

La civilisation a donc hérité du système sexagésimal de leurs ancêtres, les Sumériens et les Akkadiens.

Les Babyloniens, contrairement à ces derniers, utilisaient le système positionnel dont ils sont les précurseurs.

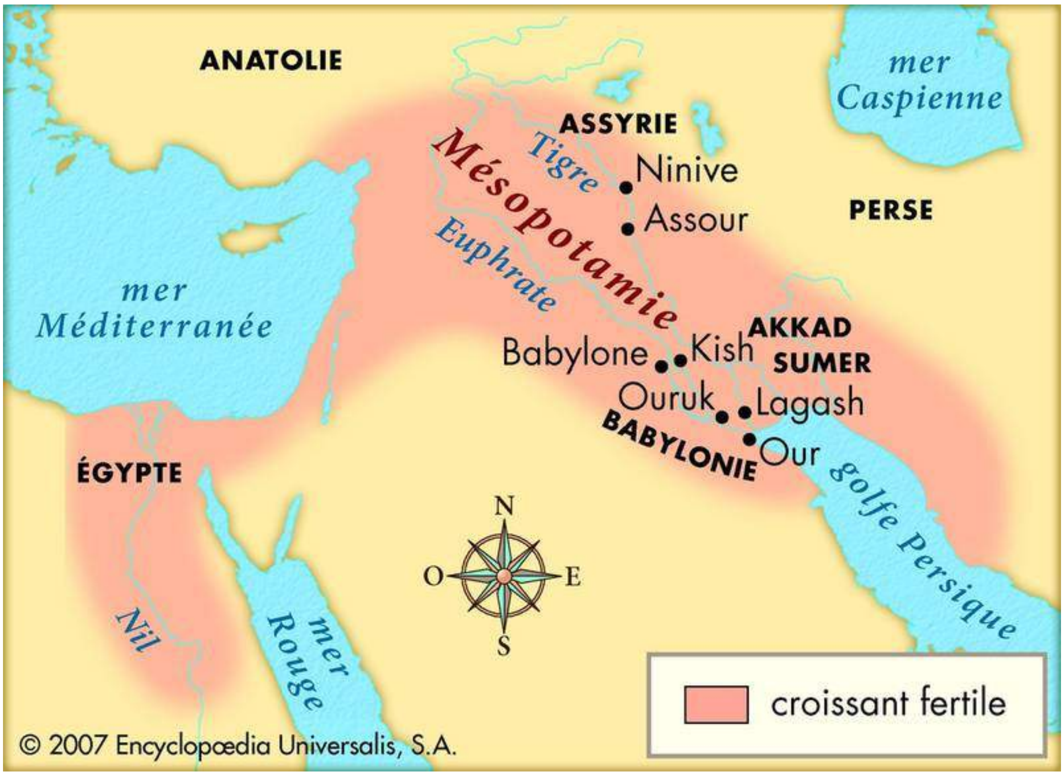


Figure I.29 : *Mésopotamie ancienne*

Symbole	Valeur
	1
	10

Les scribes de Babylone n'avaient à leur disposition que 2 chiffres. Le premier, représenté par un « clou » vertical équivaut au chiffre 1. Le second, un chevron, est associé au nombre 10.

Ils utilisaient la numération en base 60. Les chiffres jusqu'à 60 étaient écrits selon un système additif puisqu'il suffisait de juxtaposer les 2 symboles pour former les nombres.

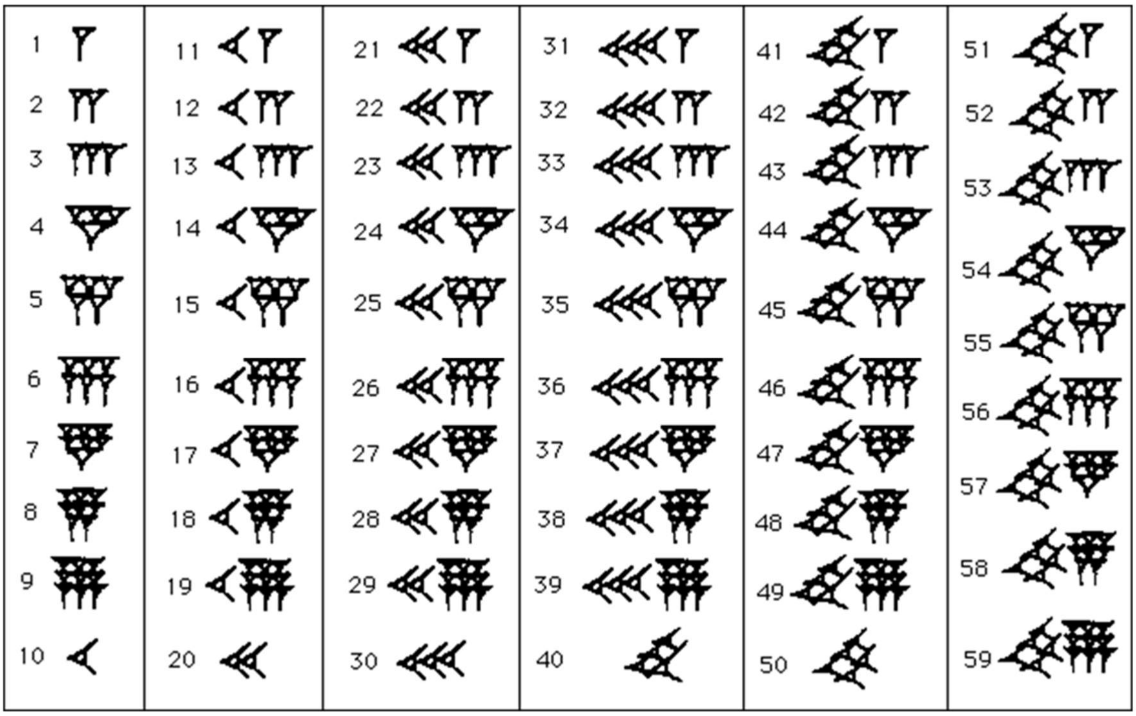


Figure I.30 : *Les chiffres babyloniens*

Et après 59 ?

A partir de 59, les nombres s'écrivaient avec les règles du système positionnel. C'est-à-dire que les chiffres étaient disposés en colonnes en fonction de leur valeur comme ci-dessous.

60^n	...	60^4	60^3	60^2	60^1	60^0

Quelques problèmes rencontrés

Un problème mineur est alors apparu. Comment différencier le chiffre 2, représenté par deux clous et le nombre 61, ayant la même représentation? Pour y remédier, ils ont différencié les rangs entre eux par un espace. Pour les chiffres inférieurs à 59, les symboles se touchaient. Le passage à une puissance supérieure, c'est-à-dire à un rang supérieur se marquait par un espace dans l'écriture du nombre.

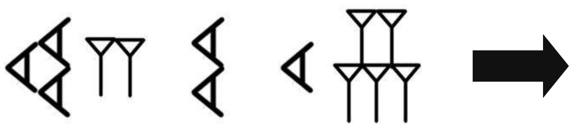
Le problème du zéro

Dans l'écriture journalière des nombres, les babyloniens oubliaient ou marquaient de moins en moins les espaces entre les symboles des nombres.

Il a donc fallu inventer un symbole pour représenter l'espace vide, ce que nous appelons aujourd'hui le zéro. Ce symbole, le plus vieux zéro de l'histoire, est représenté par un double chevron incliné. Mais ce zéro ne représentait pas une quantité. Par exemple, il n'était pas employé pour représenter la quantité équivalant à 20 moins 20.

Figure I.31 : *Le zéro babylonien*

PETIT EXEMPLE



$32X60^2 + 20X60 + 15 = 116\,415$

Figure I.32 : *Compte de chèvres et de moutons en numération babylonienne.*

Petites remarques

Les nombres décimaux

Grâce à l'invention du système positionnel sexagésimal, les babyloniens sont aussi les précurseurs des fractions : ces derniers poursuivaient les divisions pour obtenir des parties non entières, alors qu'ils ne connaissaient pas encore de symbole de séparation. Bien sûr, comme les rangs n'étaient pas toujours bien marqués, la lecture du nombre pouvait prêter à confusion. Ainsi, pouvait aussi bien représenter le nombre 20 (20.60^0) que la fraction $\frac{1}{3}$ (20.60^{-1}).

Les traces du système babylonien dans notre numération actuelle

La base 60 a laissé ses marques dans notre système. En effet, nous la retrouvons dans les mesures du temps : une heure se découpe en 60 minutes et 1 minute en 60 secondes.

Mais elle se retrouve également dans la mesure d'un cercle : l'angle au centre d'un cercle se divise en 360 degrés, soit 60 X 6.

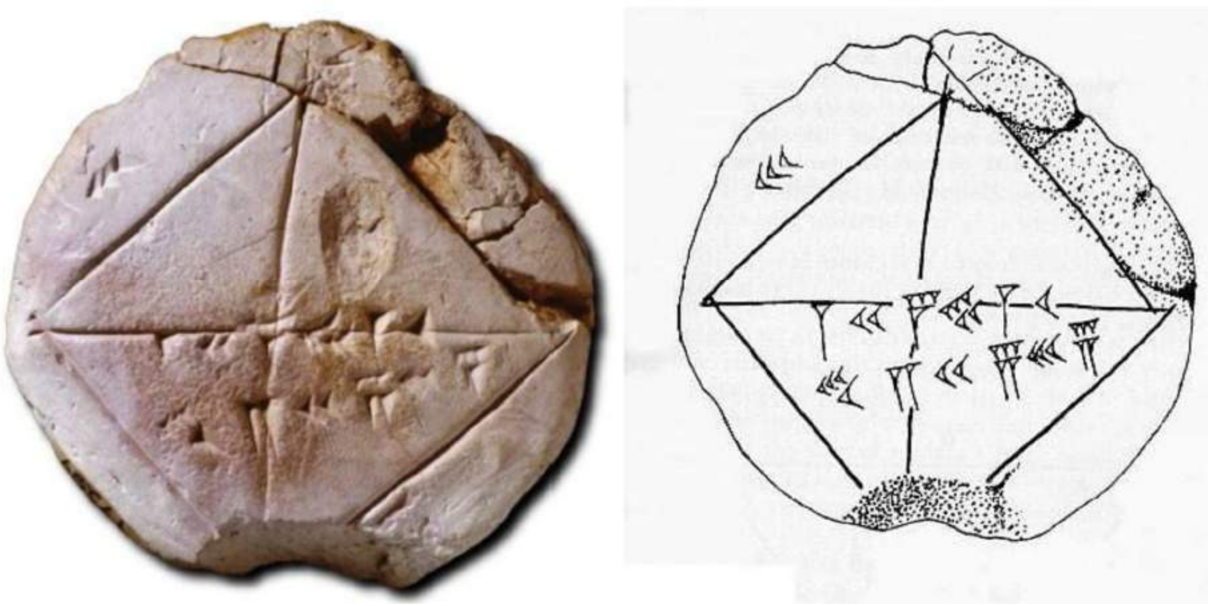


Figure I.33 : *Les babyloniens manipulaient déjà beaucoup d'opérations. Ainsi, dans la tablette YBC7289 (YBC = Yale Babylonian Catalogue), on trouve des calculs qui laissent supposer que ce peuple connaissait le théorème de Pythagore quelques 3000 avant sa découverte par Pythagore !*

Le système de numération maya

La civilisation des Mayas s'est développée entre 300 av. J.-C. et 1200 ap. J.-C. Leur territoire couvrait le sud du Mexique, le Guatemala, l'ouest du Honduras et du Salvador. Ce peuple a disparu à la suite de la conquête espagnole.

Figure I.34 : *Codex de Dresde (manuscrit maya conservé à Dresde)*

Les mayas ont laissé d'impressionnants vestiges de grandes cités dans lesquelles s'était développée une tradition savante comme en témoignent les manuscrits appelés Codex et qui ont permis de comprendre, entre autre, le fonctionnement du système de numération maya et son lien étroit avec les calendriers.

La numération des Mayas est une numération positionnelle vigésimale, c'est-à-dire de base 20. En effet, ils s'étaient rendus compte qu'en se penchant un petit peu, ils pouvaient aussi utiliser leurs orteils pour compter. C'est une numération dite additionnelle de 0 à 20 et positionnelle ensuite.

L'expression des durées occupe une place très importante dans les codex d'astronomie mayas. Elle est basée sur un système d'unités de temps de structure presque vigésimale où chaque unité vaut vingt fois la précédente : un mois (*uinal*) vaut 20 jours (*kin*). Une irrégularité dans le système est cependant présente puisqu'une année (*tun*) compte 360 jours.

Figure I.35 : *Expansion de la civilisation maya*

Figure I.36 : *Symboles de numération maya : les chiffres employés, communément appelés glyphes, étaient représentés par des têtes de divinités vues de profil.*

Les numérations écrites utilisaient deux styles de représentation des chiffres : les glyphes numériques et les signes "points/barres". Pour les calculs, les Mayas n'utilisaient pas les glyphes, qui étaient bien trop difficiles à dessiner, mais seulement 3 symboles ; à savoir, un point équivalant au chiffre un, un tiret représentant le chiffre 5, enfin une sorte d'ovale figurant la coupe d'un coquillage qui, lui, valait le chiffre 0.

Avec un tel système et de tels symboles, la capacité de représentation était infinie. En effet, ils pouvaient écrire tous les nombres car la position du chiffre lui donnait sa valeur.

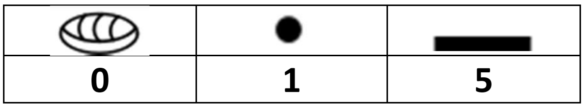


Figure I.37: *Symboles mayas pour les calculs.*

Comme pour le système babylonien, un nombre se décompose en rangs, à la différence que la base n'est plus 60 mais 20.

20^n
...
20^2
20^1
20^0

PETIT EXEMPLE

$4X20^3$

$+ 0x20^2$

$+14x20$

$+ 6 \qquad = 32\,286$

NUMERATION ORALE

Les mayas ont employé une numération orale fonctionnant sensiblement différemment de la numération écrite. Toutes les numérations mayas parlées étaient vigésimales, mais les termes utilisés pouvaient différer d'une région à l'autre.

Tableau 11

Hun	**1**
Ca	**2**
Ox	**3**
Can	**4**
Ho	**5**
Uac	**6**
Uuc	**7**
Uaxac	**8**
Bolon	**9**
Lahun	**10**
Buluc	**11**
Lahca	**12**
Hun kal	**20**

En Yucatèque, Les 12 premiers nombres et 20 possédaient chacun un nom particulier comme le montre le tableau 11.

Pour les nombres de 13 à 20, il suffisait d'ajouter le chiffre que l'on rajoute à 10 devant le suffixe « *lahun* ». Par exemple, pour 13, cela donnait *oxlahun*, pour 14, *canlahun* et ainsi de suite. Pour les nombres de 21 à 30, il fallait dès lors ajouter le mot correspondant au chiffre des unités devant le petit suffixe « *tu kal* », signifiant « après 20 ». En pratique, cela donnait pour 25, par exemple, *hotukal*.

Pour les nombres de 29 à 39, il fallait ajouter à 20 le nombre voulu. Par exemple, 39 se prononçait *bolonlahuntukal* (19 après 20).

Pour les nombres multiples de 20 jusqu'à 400, il suffisait d'intercaler le nombre de multiples de 20 entre le préfixe et le suffixe en gras dans le tableau 12. Pour la suite, l'histoire a effacé la plupart des traces, nous avons juste en notre possession les préfixes pour ces multiples de la base.Pour former les nombres, il suffisait de mettre côte à côte ces expressions.

PETIT EXEMPLE

Soit 3 200 479. Il se décompose en 3200000+400+60+19, ce qui sera prononcé en maya *hunkinchil hunbak bolonlahuntucankal*.

Tableau 12

En base 10	Dénomination maya	*Traduction littérale*
40	Ca **kal**	*deux vingtaines*
60	Ox**kal**	*trois vingtaines*
80	Can **kal**	*quatre vingtaines*
400	Hun **bak**	*une quatre centaine*
8000	Hun**pic**	*un huit milliers*
160000	Hun **calab**	*un cent-soixante milliers*
3200000	Hun **kinchil**	…

Nous pouvons mettre cette numération orale usant à la fois de procédés additifs et multiplicatifs en parallèle avec notre système de numération orale. En effet, comme nous le montrons en page 39, nous utilisons des suffixes, mots pour les multiples de notre base 10, pour ensuite ajouter le chiffre des unités à ce suffixe.

Des ficelles pour compter

L'exploration de l'Amérique au XVIe siècle par les conquistadors espagnols nous permit de découvrir un peuple exceptionnellement bien organisé et florissant, le Incas. En effet, malgré l'ignorance de ceux-ci en matière d'écriture, ils mirent en place un système très simple à base de cordes et de nœuds pour compter qu'ils appelèrent *quipu*, signifiant « nœud » en français.

Un quipu est composé d'une ficelle horizontale où sont attachées des cordelettes de couleurs différentes sur lesquelles les Incas font des nœuds.

Provenant de la civilisation de Caral établie au Pérou ancien, les plus vieux quipus découverts à ce jour dateraient d'il y a 4500 ans.

Ces outils étaient utilisés pour toutes sortes de fonctions comme des représentations de faits statistiques, de calendriers ou même pour faire passer des messages.

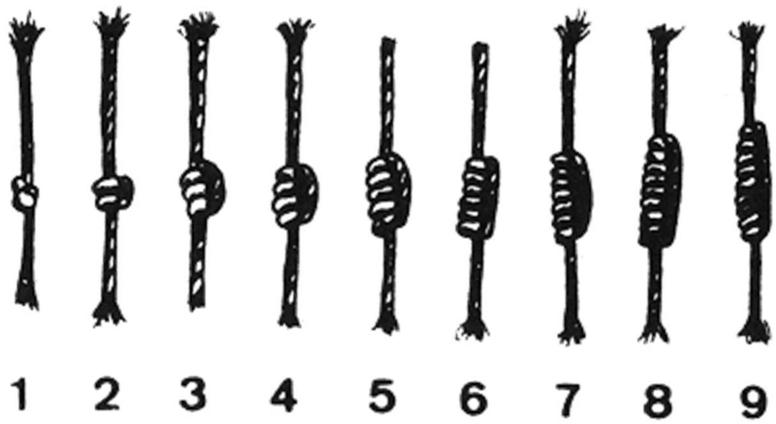
Figure I.38 : *Quipu inca.*

Effectivement, les couleurs des ficelles avaient des significations bien précises et pouvaient par conséquent illustrer des objets ou des idées conceptuelles comme le sang pour le rouge ou la pureté pour le blanc. Cependant, les quipus servaient surtout à la comptabilité qui était très développée dans l'empire Inca.

Figure I.39 : *Le Machu Picchu, ancienne cité Inca dans la cordillère des Andes, Pérou.*

COMMENT REPRESENTER UN NOMBRE ?

Les Incas travaillent avec un système positionnel, en base 10. En effet, ils partent du bas de la ficelle où ils font un certain nombre de nœuds (de 1 à 9) pour représenter les unités. Ils remontent ensuite sur la corde en laissant un espace et réalisent d'autres nœuds pour les dizaines, puis de même pour les centaines, etc.



FigureI.40 : *Les 9 chiffres du système positionnel inca.*

Des quipus en 2014 ?

Cet outil de numération a été utilisé par bien des peuples après les Incas et reste encore aujourd'hui un des nombreux moyens employés pour compter. C'est le cas en Bolivie et au Pérou où les Indiens se servent fréquemment de *chimpus*, un dérivé du quipu.

De même, on retrouve ce système de cordes chez les prêteurs sur gages sur certains archipels Japonais ou encore dans quelques peuples africains et sibériens.

PETIT EXEMPLE

Le nombre 3643 sera représenté de la manière suivante :

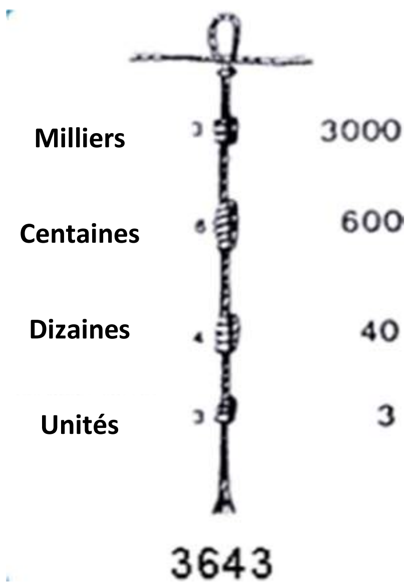


Figure I.41

Le système de numération arabe

Depuis la prime enfance, nous utilisons les chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 pour construire les nombres. Ce sont les fameux chiffres arabes. C'est grâce à l'invention de l'imprimerie, vers 1450, que les chiffres vont commencer à prendre leur forme moderne. Notre système actuel est un système décimal et positionnel, donc la capacité de représentation est infinie.

De plus, il contient dix symboles ; l'écriture d'un nombre prend moins de place que dans la numération des Mayas par exemple.

S'ils sont dits « arabes », ces chiffres ont été inventés en Inde, où, au V^{e} siècle de notre ère, naquit l'idée géniale de combiner système de position, base 10 et utilisation du zéro.

Ce système fut ensuite emprunté dès le IX^{e} siècle par le monde musulman, comme en témoigne un ouvrage d'Al-Khawarizmi (mathématicien et géographe perse, né vers 783 av. J.-C.), puis peu à peu transmis à l'Occident médiéval sous l'impulsion du pape Gerbert d'Aurillac (945-1003), qui l'introduira pour la première fois et plus tard, du mathématicien italien Léonard de Pise, dit Fibonacci qui en promouvra l'usage.

Ce système positionnel pourtant efficace et pratique mettra toutefois plusieurs siècles à supplanter le complexe système de numération romain.

Notons que le mot *chiffre* vient de l'arabe *sifr* qui signifie « vide » et le mot *zéro* vient de l'ancien italien *zefiro* qui lui-même vient de l'arabe *sifr*.

Figure I.42 : *Evolution de la numération actuelle. Il faut différencier les chiffres arabes occidentaux et orientaux. Nos chiffres actuels proviennent des chiffres arabes occidentaux, dits "gubari". Les chiffres des orientaux, dits "hindis", sont tirés directement de la notation indienne qui utilise des symboles différents pour certains chiffres.*

IV. LA NUMERATION ORALE

Nous allons clôturer cette première section en se penchant sur l'expression orale du nombre. Nous allons principalement étudier la numération orale française et belge, même si d'autres seront évoquées pour illustrer les systèmes d'énonciation.

TOUS LES CHEMINS MENENT A ROME…

Pour expliquer notre prononciation des nombres il faut remonter jusqu'à l'origine latine de celle-ci.

Nous avons vu précédemment que les Romains utilisaient un système de base décimale pour écrire les nombres, et c'est en référence à cette même base qu'ils les formulaient. Mais cette fois, plutôt que d'employer un système exclusivement additionnel, ils avaient recours à un système hybride. En effet, en latin vingt se dit *viginti* (« deux fois dix ») trente se dit *triginta* (« trois fois dix »), etc.

Cependant, les Gaulois, qui occupaient le territoire belge actuel, utilisaient un système vigésimal et progressaient donc de 20 en 20. Dès lors, on disait « vingt », « deux vingts », « trois vingts », etc. Quant aux valeurs intermédiaires, elles étaient formées en ajoutant *« et dix »*. Par exemple cinquante se prononçait *deux vingts et dix*.

Malgré notre retour au système décimal vers la fin du Moyen-âge, certaines traces du système vigésimal sont restées dans notre langage comme le « quatre-vingts » et le « soixante-dix » français (qui est un mélange du système décimal par le « *soixante* » et du vigésimal par le *« et dix »*).

UN LANGAGE IRREGULIER ET CAPRICIEUX

Nous pouvons noter de nombreuses irrégularités dans notre numération orale.

La première est la création de noms pour dire les nombres de 11 à 16 alors qu'après, nous employons une addition pour prononcer les nombres (17 se lit *dix-sept,* donc 10 + 7).

Comme deuxième bizarrerie, nous constatons que nous avons repris l'étymologie latine pour formuler les dizaines (comme expliqué ci-dessus), pourtant les centaines et milliers se forment sur un système de multiplication (200 se lit *deux cents*, donc 2x100).

Nous pouvons donc conclure qu'il y a plusieurs systèmes d'énonciation dans notre numération orale. De plus, si nous élargissons notre surface d'étude, nous découvrons encore que d'autres systèmes ont été (et sont encore) utilisés. Chaque peuple adapte son système de numération à sa propre tradition orale et aux règles de sa langue.

Nous en avons repris un certain nombre dans le tableau récapitulatif-ci-dessous.

Tableau 13 : Les opérations employées pour former oralement les nombres.

Système d'énonciation	Langues (liste non-exaustive)	Exemples
L'addition	Quasiment toutes les langues vivantes	19 = *dix-neuf* → 10 + 9 *nineteen* → 9 + 10
La multiplication	Quasiment toutes les langues vivantes	400 = *quatre cents* → 4 x 100 *cuatrocientos* → 4 x 100
La soustraction	Le latin	28 = *duodetriginta* → 30 – 2 « deux avant trente »
La division	Le breton	50 = *hanter kant* → 100 / 2 « moitié (de) cent »

Une étude linguistique permet également de voir comment a évolué l'art de compter. Ainsi, dans les langues indo-européennes, les mots désignant dix, cent peuvent être rattachés à une même origine, mais, par contre, les mots désignant mille ne le peuvent pas. Ce qui amène à penser que les peuples qui parlaient la "langue originelle", n'avaient pas atteint le millier dans le processus de comptage.

Il a fallu beaucoup de temps à l'homme pour qu'il puisse exprimer efficacement les nombres, de façon orale ou écrite. Au niveau oral, les ethnologues ont montré que certaines peuplades primitives ne disposent toujours pas de beaucoup de termes pour désigner les nombres : ils ont un mot pour « *un* », un mot pour « *deux* », ... et plus, cela devient « *beaucoup* » ! "*Beaucoup*" ou "*tres*" en latin : ce mot subsiste encore aujourd'hui en français : "*très*" mais aussi "*trois*"!
Plusieurs systèmes ont coexisté dans l'histoire et l'homme a rencontré de nombreux obstacles pour parvenir au système de numération que nous connaissons aujourd'hui et que l'on peut considérer comme universel : le système de numération positionnel.